

第四章

量子傅立葉轉換及其應用

當 1822 年，傅立葉發表了他最著名的文章(作品)，人們最初使用他的轉換在熱力學。現在，傅立葉轉換最常見的用途是信號處理。在時域 (time domain) 中給出一個信號:作為函數映時間到振幅。傅立葉轉換允許我們將信號表示為不同頻率的相移正弦的加權總和。與頻率相關的相位和權重描述頻域中的信號。傅立葉轉換在時間域信號表示和頻域之間架起橋樑。

傅立葉轉換的成功是由於它的離散版本，我們稱之為 **離散傅立葉轉換 (或 DFT)**。離散的 傅立葉轉換具有計算效率非常高效的實現，其形式為 **快速傅立葉轉換 (或 FFT)**。本章介紹複雜的集合根，並研究其性質。接下來,我們演示離散傅立葉轉換和離散傅立葉轉換的反向操作。接下來，我們介紹**量子傅立葉轉換 (或 QFT)**，這是傅立葉轉換的量子版本，類似於快速的傅立葉轉換。接下來，我們介紹如何編寫一個量子程式，實現離散傅立葉轉換和離散傅立葉轉換的反向操作。

4.1 複雜的集合根介紹

複數指數的定義是：

$$e^{\sqrt{-1}\times\theta} = \cos(\theta) + \sqrt{-1} \times \sin(\theta). \quad (4.1)$$

方程式 (4.1) 的 θ 值是一個實數。T 在複數平面的任何點(a, b) 和複數平面的原點 (0, 0) 之間的距離是：

$$\sqrt{(a - 0)^2 + (b - 0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4.2)$$

a 的值是實數, b 的值也是實數。因為根據方程式 (4.2), 方程式 (4.1) 中複數指數 $e^{\sqrt{-1}\times\theta}$ 與複數平面的原點之間的距離為 $\sqrt{(\cos(\theta) - 0)^2 + (\sin(\theta) - 0)^2} = \sqrt{(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2} = 1$, 每個 $e^{\sqrt{-1}\times\theta}$ 以複數平面原點為中心的單位半徑圓周圍均等。

集合複合第 n 根是一個複數 ω , 這樣。

$$\omega^n = 1. \quad (4.3)$$

實際上有 n 個複數的 complex n 根的集合： $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k/n}$ to $k = 0, 1, 2, \dots, n - 2, n - 1$ 。每個複數 n th 集合根之間的距離, 對於 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k/n}$, for $k = 0, 1, 2, \dots, n - 2, n - 1$ 和複數平面的原點點為 $\sqrt{(\cos(2 \times \pi \times k/n) - 0)^2 + (\sin(2 \times \pi \times k/n) - 0)^2} = \sqrt{(\cos(2 \times \pi \times k/n))^2 + (\sin(2 \times \pi \times k/n))^2} = 1$ 。因此, 對於 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k/n}$ for $k = 0, 1, 2, \dots, n - 2, n - 1$, 這是一個複數的 n th 根的集合, 均在以複數平面原點為中心的單位半徑圓周圍相等的張角。

集合的主要根是。

$$\omega_n = e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi/n}. \quad (4.4)$$

因為其他複雜 n th 集合根的是 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k/n} = (e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi/n})^k = \omega_n^k$ for $k = 0, 2, 3, \dots, n - 2, n - 1$, 它們是方程式(4.4) ω_n 中的 n 的力。因此, 集合中 n 個複數的 n 根為

$$\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-2}, \omega_n^{n-1}. \quad (4.5)$$

圖 4.1 顯示在 (4.5) $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-2}, \omega_n^{n-1}$ 是 n 個複數 n -。

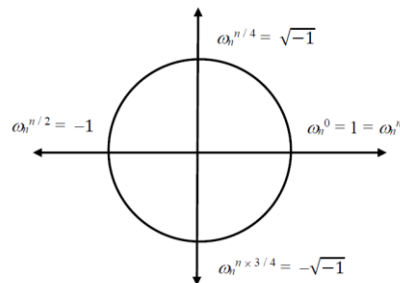


圖 4.1: 複數平面中 $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-2}, \omega_n^{n-1}$ 的值。

集合根在以複雜平面原點為中心的單位半徑圓周圍均等地張住。也就是說, ω_n^0 ,

$\omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-2}, \omega_n^{n-1}$ 位於以複雜平面原點為中心的單位半徑圓的圓周長。

4.2 阿貝利亞組織為 n 複數第 n 根集合與乘法的二元操作的插圖。

組 $(S, *)$ 是一組 $(S, *)$ 以及一個在 S 上表示的二進位操作 $*$ ，以下四個屬性都持有該二進位操作。第一個屬性是，對於所有 $a, b \in S$ ，我們有一個 $a * b \in S$ 。這就是說，這個團體 $(S, *)$ 有 **closure**。第二個屬性是，有一個元素 $e \in S$ ，稱為群組的識別 $(S, *)$ ，因此 $e * a = a * e = a$ for all $a \in S$ 。第三個屬性是，對於所有 $a, b, c \in S$ ，我們有 $e * (a * b) * c = a * (b * c)$ 。這表明群組 $(S, *)$ 具有**關聯性**。第四個屬性是，對於 each $a \in S$ 存在唯一的元素 b ，called the 稱為的**倒反**，像是 $a * b = b * a = e$ 。如果一個群組 $(S, *)$ 滿足**交換法** $a * c = c * a$ for all $a, c \in S$ ，那麼是一個**阿貝利亞組**。

我們假設一組 S 是 $\{\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-2}, \omega_n^{n-1}\}$ 這是一組 n 複數的第 n 根的集合。我們還假設二進位操作 \times 是 S 上表示的乘法。我們使用 **定理 4-1** 來證明 $(S = \{\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-2}, \omega_n^{n-1}\}, \times)$ 是阿貝利亞組。

定理 4-1: $(S = \{\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-2}, \omega_n^{n-1}\}, \times)$ 是一個阿貝利亞組。

證明: 。

對所有 $\omega_n^j, \omega_n^k \in S$ to $0 \leq j \leq (n-1)$ and $0 \leq k \leq (n-1)$ ，我們有 $\omega_n^j \times \omega_n^k = \omega_n^{j+k}$ 。如果 $(j+k)$ 的值從 0 (零) 到 $(n-1)$ ，則 $\omega_n^{j+k} \in S$ 。如果值 $(j+k)$ 從 n 到 $(2n-2)$ ，則 $\omega_n^{j+k} = \omega_n^{n+p} = \omega_n^n \times \omega_n^p = 1 \times \omega_n^p = \omega_n^p \in S$ to $0 \leq p \leq (n-2)$ 。這就是說，它滿足 **closure**。在 S 中，有一個元素 ω_n^0 等於其每個元素 $\omega_n^k \in S$ to $0 \leq k \leq (n-1)$ 滿足 $\omega_n^0 \times \omega_n^k = 1 \times \omega_n^k = \omega_n^k$ and $\omega_n^k \times \omega_n^0 = \omega_n^k \times 1 = \omega_n^k$ 。這表示 $\omega_n^0 \times \omega_n^k = \omega_n^k \times \omega_n^0 = \omega_n^k$ 。因此，它有一個**識別** ω_n^0 。

對於所有 $\omega_n^j, \omega_n^k, \omega_n^l \in S$ to $0 \leq j \leq (n-1)$ and $0 \leq k \leq (n-1)$ and $0 \leq l \leq (n-1)$ ，我們有 $(\omega_n^j \times \omega_n^k) \times \omega_n^l = \omega_n^{(j+k)+l} = \omega_n^{j+(k+l)} = \omega_n^j \times \omega_n^{k+l} = \omega_n^j \times (\omega_n^k \times \omega_n^l)$ 。這意味著它滿足**關聯性**。對於每個元素 $\omega_n^k \in S$ to $0 \leq k \leq (n-1)$ ，我們有 $\omega_n^k \times \omega_n^{n-k} = \omega_n^{n-k} \times \omega_n^k = \omega_n^n = 1 = \omega_n^0$ 。這就是說 ω_n^{n-k} 是 ω_n^k 的**反轉**。對於所有 $\omega_n^j, \omega_n^k \in S$ to $0 \leq j \leq (n-1)$ and $0 \leq k \leq (n-1)$ ，我們有 $\omega_n^j \times \omega_n^k = \omega_n^{j+k} = \omega_n^{k+j} = \omega_n^k \times \omega_n^j$ 。這就是說，它滿足了**交換律**。因此，從上面的語句，我們推斷一下 $(S = \{\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-2}, \omega_n^{n-1}\}, \times)$ ，是阿貝利亞組。

4.3 集合第 n 根複數屬性的描述。

我們使用以下定理來介紹統一的複合 n 根的必要屬性。

定理 4-2: 對於任何整數 $n \geq 0, k \geq 0$, and $j > 0$,

$$\omega_{j \times n}^{j \times k} = \omega_n^k. \quad (4.6)$$

證明: ◦

依方程式 (4.4), 我們有 $\omega_{j \times n}^{j \times k} = (e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / j \times n})^{j \times k} = (e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / n})^k = \omega_n^k$. 因此, 我們一次推斷任何 $\omega_{j \times n}^{j \times k} = \omega_n^k$ 對任何整數 $n \geq 0, k \geq 0$, and $j > 0$ 。

定理 4-3: 對於任何 **偶數** 整數 $n > 0$, ◦

$$\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1. \quad (4.7)$$

證明: ◦

根據方程式 (4.4), 我們有 $\omega_n^{n/2} = (e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / n})^{n/2} = (e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / 2}) = \omega_2 = -1$ 。因此, 我們一次派生 $\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1$ 對於任何 **偶數** 整數 $n > 0$ 。

定理 4-4: 對於任何正偶數 n , 集合的 n 複合 n 根的平方是集合的 $(n/2)$ 複合 $(n/2)$ 根。◦

證明: ◦

n 複數集合的根 ω_n^k , 對任何 **非負性** 整數 k 。 $(n/2)$ 複數集合的根 $\omega_{n/2}^k$, 對任何 **非負性** 整數 k 。 因為集合的複數 n 根的平方是 $(\omega_n^k)^2$ 我們有 $= (e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k / n})^2 = e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k \times 2 / (\frac{n}{2}) \times 2} = e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k / (\frac{n}{2})} = \omega_{n/2}^k$ 。 這就是說, 集合的複數根的平方是集合的複數 $(n/2)$ 根。

從 **定理 4-3**, 我們有 $\omega_n^{n/2} = -1$ 。 這意味著 $\omega_n^{k+(n/2)} = \omega_n^k \times \omega_n^{n/2} = \omega_n^k \times (-1) = -\omega_n^k$ 。 因此, 我們獲得 $(\omega_n^{k+(n/2)})^2 = (-\omega_n^k)^2 = (\omega_n^k)^2$ 。 這表示 ω_n^k 和 $\omega_n^{k+(n/2)}$ 具有相同的平方。 這也是說, 如果我們取集合所有複數 n 根的平方, 然後我們實際上得

到每個複雜 $(n/2)$ 根的集合兩次。因此,從上面的陳述中,我們一次推斷,對於任何正偶數 n ,集合的 n 複數 n 根的平方是 $(n/2)$ 複數 $(n/2)$ 的平方根。

定理 4-5: 對於任何整數 $n \geq 1$ 與非零整數 k 無法被 n 整數整除,。

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j = 0. \quad (4.8)$$

證明: 。

方程中 (4.8) 的通用比例 $\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j$ 為 ω_n^k 。因為非零整數 k 不能被 n 整除 n ,所以 ω_n^k 的值不等於 1。因此,我們有 $\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j = ((\omega_n^k)^n - 1) / (\omega_n^k - 1) = ((\omega_n^n)^k - 1) / (\omega_n^k - 1) = ((1)^k - 1) / (\omega_n^k - 1) = (1 - 1) / (\omega_n^k - 1) = (0) / (\omega_n^k - 1) = 0$

4.4 離散傅立葉轉換和反向離散傅立葉轉換的介紹。

我們假設 a ($n \times 1$) 向量 $a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T$ 具有每個座標 a_k to $0 \leq k \leq (n-1)$ 是一個複數, 其中 $(n \times 1)$ 向量 $a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T$ 是 $(1 \times n)$ 向量 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ 。此外,我們假設另一個 y 向量 $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})^T$ 具有每個座標 y_k to $0 \leq k \leq (n-1)$ 是一個複數, 其中 $(n \times 1)$ 向量 $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})^T$ 是 $(1 \times n)$ 向量 $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ 的。離散傅立葉轉換的矩陣 **DFT** 如下所示。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \begin{pmatrix} \omega_n^{0 \times 0} & \omega_n^{0 \times 1} & \omega_n^{0 \times 2} & \omega_n^{0 \times 3} & \dots & \omega_n^{0 \times (n-1)} \\ \omega_n^{1 \times 0} & \omega_n^{1 \times 1} & \omega_n^{1 \times 2} & \omega_n^{1 \times 3} & \dots & \omega_n^{1 \times (n-1)} \\ \omega_n^{2 \times 0} & \omega_n^{2 \times 1} & \omega_n^{2 \times 2} & \omega_n^{2 \times 3} & \dots & \omega_n^{2 \times (n-1)} \\ \omega_n^{3 \times 0} & \omega_n^{3 \times 1} & \omega_n^{3 \times 2} & \omega_n^{3 \times 3} & \dots & \omega_n^{3 \times (n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_n^{(n-1) \times 0} & \omega_n^{(n-1) \times 1} & \omega_n^{(n-1) \times 2} & \omega_n^{(n-1) \times 3} & \dots & \omega_n^{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (4.9)$$

向量 $a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T$ 的離散傅立葉轉換表示為向量 $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})^T = \mathbf{DFT} \times a$ 。在向量 y 中的傅立葉係數 y_k for $0 \leq k \leq (n-1)$ 如下。

$$y_k = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \sum_{l=0}^{n-1} a_l \times \omega_n^{k \times l}. \quad (4.10)$$

離散傅立葉轉換的轉置 **IDFT** 矩陣如下。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \begin{pmatrix} \omega_n^{-0 \times 0} & \omega_n^{-0 \times 1} & \omega_n^{-0 \times 2} & \omega_n^{-0 \times 3} & \dots & \omega_n^{-0 \times (n-1)} \\ \omega_n^{-1 \times 0} & \omega_n^{-1 \times 1} & \omega_n^{-1 \times 2} & \omega_n^{-1 \times 3} & \dots & \omega_n^{-1 \times (n-1)} \\ \omega_n^{-2 \times 0} & \omega_n^{-2 \times 1} & \omega_n^{-2 \times 2} & \omega_n^{-2 \times 3} & \dots & \omega_n^{-2 \times (n-1)} \\ \omega_n^{-3 \times 0} & \omega_n^{-3 \times 1} & \omega_n^{-3 \times 2} & \omega_n^{-3 \times 3} & \dots & \omega_n^{-3 \times (n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_n^{-(n-1) \times 0} & \omega_n^{-(n-1) \times 1} & \omega_n^{-(n-1) \times 2} & \omega_n^{-(n-1) \times 3} & \dots & \omega_n^{-(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix} \quad n \times n \quad (4.11)$$

向量 $y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ 的反轉離散傅立葉轉換表示為向量 $a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T = \mathbf{IDFT} \times y$ 。在向量 a 中的反向傅立葉係數 a_k for $0 \leq k \leq (n-1)$ 如下

$$a_k = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \sum_{l=0}^{n-1} y_l \times \omega_n^{-k \times l} \quad (4.12)$$

在方程式 (4.11) 中逆向離散傅立葉轉換的 **IDFT** 矩陣，實際上是與方程式 (4.9) 中離散傅立葉轉換的 **DFT** 矩陣偶連轉置。同樣，在方程式(4.9)中的 **DFT** 矩陣的傅立葉轉換，實際上是與方程式(4.11)中離散傅立葉轉換的 **IDFT** 矩陣偶連轉置。我們使用以下兩個定理來表示方程式(4.9)中離散傅立葉轉換的 **DFT** 矩陣是單一矩陣(一個單一運算符),而方程式(4.11)中傅立葉轉換的 **IDFT** 矩陣也是一個單一矩陣(一個單一運算符)。

定理 4-6: 方程式(4.9) 中傅立葉轉換的 **DFT** 矩陣是一個單位矩陣(單位運算符)。

證明: 。

對於 $0 \leq j \leq (n-1)$ 和 $0 \leq k \leq (n-1)$, 在方程式(4.9)中離散傅立葉轉換的 **DFT** 矩陣是 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \omega_n^{k \times j}\right)$ 。同樣,對於 $0 \leq j \leq (n-1)$ 和 $0 \leq k \leq (n-1)$,在方程式(4.11)中離散傅立葉轉換 **IDFT** 矩陣是 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \omega_n^{-k \times j}\right)$ 。我們有 **DFT** \times **IDFT** 的 (j, l) 項目等於 $(1/n) \times (\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{j \times k}) \times (\omega_n^{-k \times l})) = (1/n) \times (\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{(j-l) \times k}))$, 如果 j 的值等於 l 的值,則此求和等於 1,否則**定理 4-5** 等於求和 0。這就是說 **DFT** \times **IDFT** 是一個 $(n \times n)$ 單位矩陣. 。

同樣, **IDFT** \times **DFT** 的 (j, l) 項等於 $(1/n) \times (\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{-j \times k}) \times (\omega_n^{k \times l})) = (1/n) \times (\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{(l-j) \times k}))$ 。如果 $j = l$, 此求和等於 1, 否則由**定理 4-5**,即求和 0。這表示 **IDFT** \times **DFT** 是一個 $(n \times n)$ 單位矩陣。因此,從上面的語句中,我們一次推斷方程

式(4.9)中的離散傅立葉轉換矩陣 **DFT** 是一個單一矩陣(一個單一運算符)。

定理 4-7 : 方程(4.11)中的反轉離散傅立葉轉換矩陣 **IDFT** 也是一個單一矩陣(單一運算符)。

證明: 。

對於 $0 \leq j \leq (n-1)$ 和 $0 \leq k \leq (n-1)$, 在方程式(4.11)中的反轉離散傅立葉轉換的 **IDFT** 矩陣的 (k, j) 項目是 $(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \omega_n^{-k \times j})$ 。同樣, 對於 $0 \leq j \leq (n-1)$ 和 $0 \leq k \leq (n-1)$, 在方程式(4.9)中的反轉離散傅立葉轉換的 **DFT** 矩陣的 (k, j) 項目是 $(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \omega_n^{k \times j})$ 。我們有 **IDFT** \times **DFT** 的 (j, l) 項目等於 $(1/n) \times (\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{-j \times k}) \times (\omega_n^{k \times l})) = (1/n) \times (\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{(l-j) \times k}))$ 。如果 j 的值等於 l 的值, 則此求和等於 1, 否則 **定理 4-5** 等於求和 0。這表示 **IDFT** \times **DFT** 是一個 $(n \times n)$ 單位矩陣。

同樣, **DFT** \times **IDFT** 的 (j, l) 項目等於 $(1/n) \times (\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{j \times k}) \times (\omega_n^{-k \times l})) = (1/n) \times (\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^{(j-l) \times k}))$ 。如果 $j=l$, 此求和等於 1, 否則由 **定理 4-5**, 即求和 0。這就是說 **DFT** \times **IDFT** 是一個 $(n \times n)$ 單位矩陣。因此, 從上面的語句中, 我們一次得出方程式 (4.11) 反轉離散傅立葉轉換矩陣 **IDFT** 的是一個單一矩陣(一個單一運算符)。 ■

4.5 實現離散傅立葉轉換的量子傅立葉轉換。

希爾伯特空間的 n 維正射基礎 α 如下。

$$\alpha = \{(1, 0, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, 0, \dots, 0)^T, (0, 0, 1, \dots, 0)^T, \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)^T\}. \quad (4.13)$$

在不失去一般性的情況下, 我們假設 n 是二 (2) 的力量。 n 維正交基礎中每個元素的長度 α 是統一的。 n 維正交基礎中任何兩個元素的內部產品 α 為零。中的每個元素都是計算基礎向量。我們使用計算基礎狀態 $|0\rangle$ 對第一個計算基礎向量 $(1, 0, 0, \dots, 0)^T$ 進行編碼。我們應用計算基礎狀態 $|1\rangle$ 對第二個計算基礎向量 $(0, 1, 0, \dots, 0)^T$ 進行編碼。我們使用計算基礎狀態 $|2\rangle$ 對第三個計算基礎向量 $(0, 0, 1, \dots, 0)^T$ 等進行編碼, 我們使用計算基礎狀態 $|n-1\rangle$ 編碼最後一個計算基礎向量 $(0, 0, 0, \dots, 1)^T$ 。這就是說, 基礎 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |n-1\rangle\}$ 編碼成希爾伯特空間的 n

維正交基礎 α 。

疊加 $|\beta\rangle$ 是每個計算基礎向量(或每個計算基礎狀態)的線性組合,因此疊加 $|\beta\rangle$ 如下所示。

$$|\beta\rangle = \sum_{a=0}^{n-1} \beta_a \times |a\rangle = \sum_{a=0}^{n-1} \beta_a |a\rangle. \quad (4.14)$$

In 疊加 $|\beta\rangle$ 在方程式(4.14), β_a 表示 $0 \leq a \leq (n-1)$ 是每個計算基礎狀態的振幅 $|a\rangle$ 這樣 $\sum_{a=0}^{n-1} |\beta_a|^2 = 1$ 。

量子傅立葉變換的矩陣 **QFT** 與方程式(4.9)中離散傅立葉變換的矩陣 **DFT** 相同。由於 **QFT** 和 **DFT** 是相同的矩陣,**DFT** 是**定理 4-6** 中的單一矩陣(單一運算子),因此 **QFT** 也是一個單一矩陣(單一運算符)。量子傅立葉轉換是一個計算非常高效的實現離散的傅立葉轉換,其形式是追溯到 **QFT** 到其張量產物分解。量子 Fourier 變換將方程中的疊加位 $|\beta\rangle = \sum_{a=0}^{n-1} \beta_a |a\rangle$ 轉換為以下新的疊加。

$$|y\rangle = \text{QFT}(|\beta\rangle) = \text{QFT}(\sum_{a=0}^{n-1} \beta_a |a\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times (\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{a=0}^{n-1} \beta_a \times \omega_n^{k \times a} |k\rangle). \quad (4.15)$$

在新的疊加 $|y\rangle$ 在方程式(4.15),傅立葉係數 y_k for $0 \leq k \leq (n-1)$ 如下。

$$y_k = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times (\sum_{a=0}^{n-1} \beta_a \times \omega_n^{k \times a}). \quad (4.16)$$

將 **QFT**(量子傅立葉變換)應用於計算基礎狀態 $|a\rangle$ for $0 \leq a \leq (n-1)$ 產生。

$$\text{QFT}(|a\rangle) = \text{QFT}(|a\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times (\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{k \times a} |k\rangle). \quad (4.17)$$

在下面的中,我們採取 $n = 2^N$,其中 N 是量子計算機中的量子位數,基礎 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |2^N - 1\rangle\}$ 是量子計算機的計算基礎。我們在這裡提到 $(\omega_n^{k \times a}) = (\omega_{2^N}^{k \times a}) = (e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k \times a) / 2^N})$ 。編寫計算基礎狀態非常有用。對於 $|a\rangle$ for $0 \leq a \leq (2^N - 1)$ 使用二進制表示形式 $a = a_1 a_2 a_3 \dots a_N = a_1 \times 2^{N-1} + a_2 \times 2^{N-2} + a_3 \times 2^{N-3} + \dots + a_N \times 2^0$ 。編寫符號 0 也非常有用。 $a_1 a_2 a_3 \dots a_N$ 表示二進位數 $a_1 \times 2^{-1} + a_2 \times 2^{-2} + a_3 \times 2^{-3} + \dots + a_N \times 2^{-N}$ 。以下非常有用的產品表示是張量產品分解的量子傅立葉變換:。

$$\begin{aligned} \text{QFT}(|a\rangle) &= \text{QFT}(|a_1 a_2 a_3 \dots a_N\rangle) = \left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &\otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_{N-2} a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_1 a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

產品表示 (4.18) 實際上是量子傅立葉變換的定義。我們使用以下定理來顯示產品表示產品表式 (4.18) 和定義 (4.17) 與量子傅立葉轉換的等效性。

定理 4-8: product 產品表示形式(4.18)相當於量子傅立葉轉換的定義(4.17),與量子傅立葉轉換的定義相當。

證明: 。

因為我們用 $n = 2^N$ 將 **QFT** (量子傅立葉變換) 應用於計算基礎狀態 $|a\rangle$ for $0 \leq a \leq (2^N - 1)$, 量子傅立葉變換的定義 (4.17) 如下所示。

$$\text{QFT}(|a\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{2^N-1} \omega_{2^N}^{k \times a} |k\rangle \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{2^N-1} e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k \times a) / 2^N} |k\rangle \right). \quad (4.19)$$

我們編寫計算基礎狀態 $|k\rangle$ for $0 \leq k \leq (2^N - 1)$ 使用二進制表示 $k = k_1 k_2 k_3 \dots k_N = k_1 \times 2^{N-1} + k_2 \times 2^{N-2} + k_3 \times 2^{N-3} + \dots + k_N \times 2^0$ 。我們還編寫符號 0 。 $k_1 k_2 k_3 \dots k_N$ 表示二進位數 $k_1 \times 2^{-1} + k_2 \times 2^{-2} + k_3 \times 2^{-3} + \dots + k_N \times 2^{-N}$ 。分式 $k / 2^N$ 的計算是 $k / 2^N = k_1 k_2 k_3 \dots k_N / 2^N = (k_1 \times 2^{N-1} + k_2 \times 2^{N-2} + k_3 \times 2^{N-3} + \dots + k_N \times 2^0) / 2^N = k_1 \times 2^{-1} + k_2 \times 2^{-2} + k_3 \times 2^{-3} + \dots + k_N \times 2^{-N} = (\sum_{l=1}^N k_l \times 2^{-l})$ 。總和 $\sum_{k=0}^{2^N-1}$ 的計算是完成 2^N 項的總和。總和 $\sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_N=0}^1$ 的計算也是完成 2^N 項的總和。如果它們處理相同的項目,則 $\sum_{k=0}^{2^N-1} = (\sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_N=0}^1)$ 因此,我們重寫量子傅立葉轉換的定義(4.19),如下所示。

$$\text{QFT}(|a\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}} \right) \times \left(\sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_N=0}^1 e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times (\sum_{l=1}^N k_l \times 2^{-l}))} |k_1 \dots k_N\rangle \right). \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \text{產品表示 } & \left(\otimes_{l=1}^N e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_l \times 2^{-l})} |k_l\rangle \right) \text{ 等於 } \left(e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_1 \times 2^{-1})} |k_1\rangle \right) \otimes \\ & \left(e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_2 \times 2^{-2})} |k_2\rangle \right) \otimes \dots \otimes \left(e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_N \times 2^{-N})} |k_N\rangle \right) = \\ & \left(e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_1 \times 2^{-1})} \times \dots \times e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_N \times 2^{-N})} |k_1 \dots k_N\rangle \right) = \end{aligned}$$

$$(e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times (k_1 \times 2^{-1} + \dots + k_N \times 2^{-N}))} |k_1 \dots k_N\rangle) = (e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times (\sum_{l=1}^N k_l \times 2^{-l}))} |k_1 \dots k_N\rangle)。$$

因此,我們重寫量子傅立葉轉換的定義(4.20),如下所示。

$$\mathbf{QFT}(|a\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \times \left(\sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_N=0}^1 \otimes_{l=1}^N e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_l \times 2^{-l})} |k_l\rangle\right) \quad (4.21)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \times \left(\otimes_{l=1}^N \left(\sum_{k_l=0}^1 e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_l \times 2^{-l})} |k_l\rangle\right)\right) \quad (4.22)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \times \left(\otimes_{l=1}^N (e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times 0 \times 2^{-l})} |0\rangle + e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times 1 \times 2^{-l})} |1\rangle)\right) \quad (4.23)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \times \left(\otimes_{l=1}^N (|0\rangle + e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times 1 \times 2^{-l})} |1\rangle)\right). \quad (4.24)$$

除法($a \times 2^{-l} = a / 2^l$) for $1 \leq l \leq N$ 的計算為完成 l 位置的左移到小數點".。這就是說,對於 $1 \leq l \leq N$, 我們得到一個 $a \times 2^{-l} = a / 2^l = a_1 \dots a_{N-l} . a_{N-l+1} a_{N-l+2} \dots$

a_N . 因此,我們獲得 $e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times 1 \times 2^{-l})} = e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a_1 \dots a_{N-l} . a_{N-l+1} \dots a_N)} = e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (a_1 \dots a_{N-l} + 0 . a_{N-l+1} \dots a_N))} = \left(\begin{matrix} e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (a_1 \dots a_{N-l}))} \\ e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0 . a_{N-l+1} \dots a_N))} \end{matrix} \right) = \left(1 \times e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0 . a_{N-l+1} \dots a_N))} \right) = \left(e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0 . a_{N-l+1} \dots a_N))} \right)$ 。接下來,我們重寫量子傅立葉轉換的定義(4.24),如下所

示。 $\times e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0 . a_{N-l+1} \dots a_N))} e^{(\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0 . a_{N-l+1} \dots a_N))}$

$$\mathbf{QFT}(|a\rangle) = \mathbf{QFT}(|a_1 a_2 a_3 \dots a_N\rangle) = \left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 . a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 . a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 . a_{N-2} a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 . a_1 a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.25)$$

因此,從上面的語句中,我們一次推斷出產品表示(4.18)相當於量子傅立葉變換的定義 (4.17),並且與量子傅立葉轉換的定義相等。

+++++

4.6 實現量子傅立葉變換的量子電路

“如果 C 為真，則執行 D”。這種類型的受控操作是派生用於量子傅立葉變換的非常高效的電路中最有用的一種。A (2x2) 矩陣 $R_{k,c}$ 如下

$$R_{k,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / 2^k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

作為 $A(2 \times 2)$ 矩陣 $\overline{R_{k,c}}$ 的共軛轉置的 (2×2) 矩陣 $R_{k,c}$ 如下

$$\overline{R_{k,c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / 2^k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / 2^k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

因為 $R_{k,c} \times \overline{R_{k,c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^1 \times \omega_{2^k}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^{1-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $\overline{R_{k,c}} \times R_{k,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^{-1} \times \omega_{2^k}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^{-1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^k}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩陣 $R_{k,c}$ 是 a 矩陣 (單一運算符), 矩陣 $\overline{R_{k,c}}$ 是矩陣 (單一運算符)。 $R_{k,c}$ 受控操作是包含控制位和目標位的兩個量子位的操作。如果控制位設置為 $|1\rangle$, 則將矩陣 $R_{k,c}$ 應用於目標位。否則, 矩陣 $R_{k,c}$ 不會改變目標位。

類似地, 受控 $\overline{R_{k,c}}$ 操作是兩個量子位的操作, 其中兩個量子位包括控制位和目標位。如果控制位設置為 $|1\rangle$, 則將矩陣 $R_{k,c}$ 應用於目標位。否則, 矩陣 $\overline{R_{k,c}}$ 不會改變目標位。受控 $R_{k,c}$ 操作和受控 $\overline{R_{k,c}}$ 操作的矩陣表示為

$$CR_{k,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / 2^k} \end{bmatrix} \text{ and } \overline{CR_{k,c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / 2^k} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

公式 (4.28) 中的矩陣 $\overline{CR_{k,c}}$ 是公式中矩陣 $CR_{k,c}$ 的共軛轉置 (4.28) 因為.

$$CR_{k,c} \times \overline{CR_{k,c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / 2^k \times (1-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{和 } \overline{CR_{k,c}} \times CR_{k,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi / 2^k \times (-1+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, CR_{k,c} \times$$

$\overline{CR_{k,c}}$ 是一個單位矩陣, $\overline{CR_{k,c}} \times CR_{k,c}$ 也是一個單位矩陣。因此, $CR_{k,c} \times \overline{CR_{k,c}} = \overline{CR_{k,c}} \times CR_{k,c}$ 和矩陣 $CR_{k,c}$ 以及矩陣 $\overline{CR_{k,c}}$ 都是矩陣 (單一運算符)。圖 4.2 顯示了受控 $CR_{k,c}$ 的電路表示, 圖 4.3 顯示了受控 $\overline{CR_{k,c}}$ 運算的電路表示。

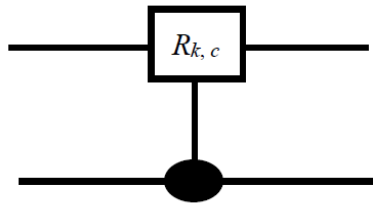


圖 4.2：Controlled- $R_{k,c}$ 操作，其中底線是控制位，頂線是目標位。

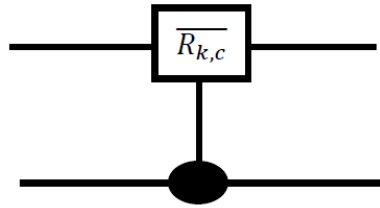


圖 4.3：Controlled- $\overline{R_{k,c}}$ 操作，其中底線是控制位，頂線是目標位。

一個(4 × 4)矩陣交換及其共軛轉置 \overline{swap}

$$swap = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \overline{swap} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

因為 $swap \times \overline{swap} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{swap} \times swap$ 矩陣交換和矩陣 \overline{swap} 都是

矩陣（單一運算符）。矩陣交換是兩個量子位交換閘的矩陣表示。交換閘的功能是交換包含在兩個量子位中的信息。圖左圖

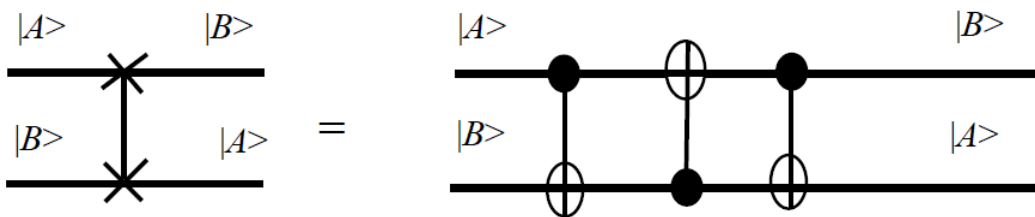


圖 4.4：具有兩個量子位的交換閘的電路表示。

圖 4.4 是具有兩個量子位的交換閘的電路表示，圖 4.4 的右圖是通過使用三個 CNOT 閘實現交換閘的電路表示。

初始狀態向量為 $|\beta_0\rangle = |A\rangle \otimes |B\rangle$ 對於圖 4.4 中的左電路和右電路，其中 $A \in \{0, 1\}$ and $B \in \{0, 1\}$ 。具有控制位的第一個 CNOT 閘的輸出 $|A\rangle$ 和目標位 $|B\rangle$ 在圖 4.4

的右電路中是 $|\theta_1\rangle = |A\rangle \otimes |A \oplus B\rangle$ 。接下來，具有控制位的第二 CNOT 閘的輸出 $|A \oplus B\rangle$ 和目標位 $|A\rangle$ 在圖 4.4 的右電路中是 $|\theta_2\rangle = |A \oplus (A \oplus B)\rangle \otimes |A \oplus B\rangle = |A \oplus A \oplus B\rangle \otimes |A \oplus B\rangle = |0 \oplus B\rangle \otimes |A \oplus B\rangle = |B\rangle \otimes |A \oplus B\rangle$ 。最後，具有控制位的第三 CNOT 閘的輸出 $|B\rangle$ 和目標位 $|A \oplus B\rangle$ 在圖 4.4 的右電路中是 $|\theta_3\rangle = |B\rangle \otimes |(A \oplus B) \oplus B\rangle = |B\rangle \otimes |A \oplus B \oplus B\rangle = |B\rangle \otimes |A \oplus 0\rangle = |B\rangle \otimes |A\rangle$ 。因為兩個狀態向量 $|\beta_1\rangle$ 和 $|\theta_3\rangle$ 相同，圖 4.4 的左電路等效於圖 4.4 的右電路。

乘積表示 (4.18) 可以輕鬆推斷出實現量子傅立葉變換的非常有效的電路。這樣的電路出現在圖 4.5 中。

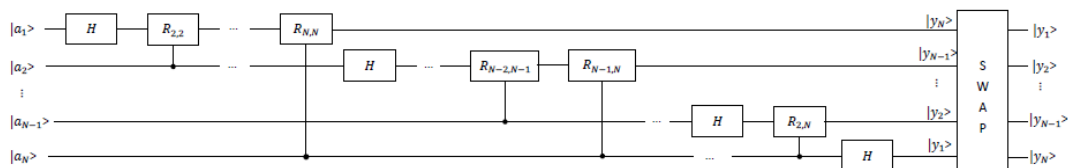


圖 4.5：實現量子傅立葉變換的高效電路。

考慮一下當狀態發生了什麼 $|a_1 \dots a_N\rangle$ 是圖 4.5 中所示電路的輸入，用於計算量子傅立葉變換。利用 Hadamard 閘至第一個量子位產生以下狀態。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_1} |1\rangle) |a_2 \dots a_N\rangle \quad (4.30)$$

當 $a_1 = 1$ ，我們獲得 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_1} = e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot 1} = e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2})} = e^{\sqrt{-1} \times \pi} = -1$ 。當 $a_1 = 0$ ，我們獲得 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_1} = e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot 0} = 1$ 。這滿足了 Hadamard 閘的功能。

接下來，使用受控- $R_{2,2}$ 閘產生以下狀態

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_1} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot 0 a_2} |1\rangle) |a_2 \dots a_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \\ e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0 \cdot a_1 + 0 \cdot 0 a_2)} |1\rangle) |a_2 \dots a_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_1 a_2} |1\rangle) |a_2 \dots a_N\rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

當 $a_2 = 1$ 相當於控制位 $|a_2\rangle$ to be $|1\rangle$ ，它增加了階段

$$e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{4})} = e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot 01} = e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot 0 a_2}$$

到第一個的係數 $|1\rangle$ ，當 $a_2 = 0$ 相當於控制位 $|a_2\rangle$ to be $|0\rangle$ 它不會改變第一個的係數 $|1\rangle$ 因為 $e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.0a_2} = e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.00} = 1$ 。這滿足了受控- R_2 2 閘的功能。

接下來，應用受控- R_3 3 閘產生以下狀態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.a_1a_2} \times e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.00a_3}|1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times (0.a_1a_2+0.00a_3)}|1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.a_1a_2a_3}|1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle.$$

當 $a_3 = 1$ 相當於控制位 $|a_3\rangle$ 成為 $|1\rangle$ ，它增加了階段 $e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times (\frac{1}{8})} = e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.001} = e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.00a_3}$ 到第一個的係數 $|1\rangle$ ，當 $a_3 = 0$ 相當於控制位 $|a_3\rangle$ 成為 $|0\rangle$ ，它不會改變第一個的係數 $|1\rangle$ ，因為 $e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.00a_3} = e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.000} = 1$ 。這滿足了受控- R_3 ，3 閘的功能。

我們將繼續使用受控的- R_4 ，4， R_5 ，5 通過 R_N ，N 閘，他們隨後將相位

($e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.0000a_4}$)和相位($e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.0000a_5}$)相加($e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.00\cdots a_N}$)到第一個 $|1\rangle$ 的係數。在此過程結束時，我們獲得以下狀態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.a_1a_2a_3} \times e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.0000a_4} \times e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.0000a_5} \times \cdots \times e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.00\cdots a_N}|1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times (0.a_1a_2a_3+0.0000a_4+0.0000a_5+0.00\cdots a_N)}|1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.a_1a_2a_3a_4a_5\cdots a_N}|1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle. \quad (4.33)$$

接下來，我們在第二個量子位上完成類似的過程。將 Hadamard 閘應用到第二個量子位會產生以下狀態

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.a_1a_2\cdots a_N}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{|0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times \pi\times 0.a_2}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) |a_3 \cdots a_N\rangle. \quad (4.34)$$

接下來，通過 R_{N-1} ， N 閘施加受控的 $-R_{2,3}$ ， $R_{3,4}$ ， N 個閘產生以下狀態

$$\left(\frac{|0\rangle+e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 0.a_1a_2\dots a_N|1\rangle}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle+e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 0.a_2\dots a_N|1\rangle}}{\sqrt{2}}\right)|a_3\dots a_N\rangle. \quad (4.35)$$

我們以這種方式繼續每個量子位，給出最終狀態

$$\left(\frac{|0\rangle+e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 0.a_1a_2\dots a_N|1\rangle}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle+e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 0.a_2\dots a_N|1\rangle}}{\sqrt{2}}\right)\dots\left(\frac{|0\rangle+e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 0.a_N|1\rangle}}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.36)$$

接下來，應用交換操作反轉量子位的順序。交換操作後，量子位的狀態為

$$\left(\frac{|0\rangle+e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 0.a_N|1\rangle}}{\sqrt{2}}\right)\otimes\left(\frac{|0\rangle+e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 0.a_{N-1}a_N|1\rangle}}{\sqrt{2}}\right)\otimes\left(\frac{|0\rangle+e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 0.a_{N-2}a_{N-1}a_N|1\rangle}}{\sqrt{2}}\right)\otimes\dots$$

$$\otimes\left(\frac{|0\rangle+e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 0.a_1a_2\dots a_N|1\rangle}}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.37)$$

與方程式 (4.18) 和方程式 (4.37) 比較，我們看一下量子傅立葉變換的期望輸出。這種結構還證明了量子傅立葉變換是 unit 的，因為圖 4.5 電路中的每個閘都是 unit 的。

4.7 評估實現量子傅立葉變換的時間複雜度

圖 4.5 中實現量子傅立葉變換的電路使用多少個閘？我們首先通過做一個 Hadamard 閘和在第一個量子位上進行 $(n-1)$ 有條件的旋轉來開始。這總共需要 n 個閘。下一步（第二步）是在第二量子位上進行 Hadamard 閘和 $(n-2)$ 有條件的旋轉。這總共需要 $n + (n-1)$ 個閘。下一步（第三步）是對第三量子位進行 Hadamard 閘和 $(n-3)$ 有條件的旋轉。這總共需要 $n + (n-1) + (n-2)$ 個閘。以這種方式繼續進行，總共需要 $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n * (n+1) / 2$ 個閘，以及最多 $n / 2$ 個交換閘，這些閘可將量子位的順序。因為每個交換閘都可以通過使用三個受控非閘來實現，所以圖 4.5 中的電路提供了 $O(n^2)$ 算法來完成量子傅立葉變換。

快速傅立葉變換是使用 $O(n \text{ applying } 2n)$ 閘在 $2n$ 個元素上計算離散傅立葉變換的最佳經典算法。這就是說，與在量子計算機上實現量子傅立葉變換相比，在數字（經典）計算機上計算離散傅立葉變換需要更多的運算。對於現實世界中的許多應用而言，傅里葉變換是至關重要的一步。計算機語音識別是傅里葉變換最重要的應用之一。在計算機語音識別的音素識別中，第一步是對數字化聲音進行傅立葉變換。我們可以利用量子傅立葉變換來增強這些傅立葉變換的性能嗎？不幸的是，沒有已知的方法可以完成此操作。由於量子計算機中的測量無法直接訪問幅度，因此無法計算原始狀態的傅立葉變換幅度。更糟糕的

是，問題在於，通常沒有辦法有效地準備要進行傅立葉變換的原始狀態。

4.8 實現離散傅立葉逆變換的量子逆傅立葉變換

逆量子傅立葉變換的矩陣 **IQFT** 與方程式 (4.11) 中逆離散傅立葉變換的矩陣 **IDFT** 相同。因為 **IQFT** 和 **IDFT** 是相同的矩陣，並且 **IDFT** 是引用 4-7 中的 unit 矩陣 (a 算子)，所以 **IQFT** 也是 a 矩陣 (a 算子)。逆傅立葉逆變換是對離散傅立葉逆變換的一種非常高效的計算實現，其形式為追溯 **IQFT** 到其張量積分解。下面，我們取 $n = 2N$ ，其中 N 是量子計算機中的量子位數，並且基礎 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |2N-1\rangle\}$ 是計算基礎。用於量子計算機。我們在這裡提到

$$(\omega_n^{-k \times a}) = (\omega_{2^N}^{-k \times a}) = (e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k \times a) / 2^N}).$$

應用 **IQFT** (逆量子傅里葉逆變換) 到計算基礎狀態 $|a\rangle$ for $0 \leq a \leq (2^N - 1)$ 產量

$$\begin{aligned} \mathbf{IQFT} \times (|a\rangle) &= \mathbf{IQFT} (|a\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{2^N-1} \omega_{2^N}^{-k \times a} |k\rangle \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}} \right) \times \\ &\left(\sum_{k=0}^{2^N-1} e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k \times a) / 2^N} |k\rangle \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

使用二進製表示形式寫 $0 \leq a \leq (2^N - 1)$ 的計算基礎狀態 $|a\rangle$ 非常有用 $a = a_1 a_2 a_3 \dots a_N = a_1 \times 2^{N-1} + a_2 \times 2^{N-2} + a_3 \times 2^{N-3} + \dots + a_N \times 2^0$ 編寫符號 0 也是非常有用的。 $a_1 a_2 a_3 \dots a_N$ 表示二進制分數 $a_1 a_2 a_3 \dots a_N$ 以下非常有用的乘積表示形式是逆量子傅立葉變換的張量積分解：

$$\begin{aligned} \mathbf{IQFT} (|a\rangle) &= \mathbf{IQFT} (|a_1 a_2 a_3 \dots a_N\rangle) = \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \\ &\left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_{N-2} a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \dots \otimes \\ &\left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0 \cdot a_1 a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

乘積表示 (4.39) 實際上是對逆量子傅立葉變換的定義。我們利用以下引理證明了逆量子傅立葉變換的乘積表示 (4.39) 和定義 (4.38) 是等效的。

引理 4-9：乘積表示 (4.39) 等同於逆量子傅立葉變換的定義 (4.38)，並且等於逆量子傅立葉變換的定義。

證明：

因為我們取 $n = 2^N$ 來使用 **IQFT**（逆量子傅立葉變換）來計算 $0 \leq a \leq (2^N - 1)$ 的計算基態 $|a\rangle$ ，所以逆量子傅立葉變換的定義（4.38）為

$$\mathbf{QFT}(|a\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \left(\sum_{k=0}^{2^N-1} \omega_2^{-k \times a} |k\rangle\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \left(\sum_{k=0}^{2^N-1} e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times k \times a) / 2^N} |k\rangle\right). \quad (4.40)$$

我們使用二進製表示寫出 $0 \leq k \leq (2^N - 1)$ 的計算基礎狀態 $|k\rangle = |k_1 k_2 k_3 \dots k_N\rangle = k_1 \times 2^{N-1} + k_2 \times 2^{N-2} + k_3 \times 2^{N-3} + \dots + k_N \times 2^0$ 。

我們還用記號 0 表示 $k_1 k_2 k_3 \dots k_N$ 表示二進制分數 $k_1 \times 2^{-1} + k_2 \times 2^{-2} + k_3 \times 2^{-3} + \dots + k_N \times 2^{-N}$ 。

除法 $k / 2^N$ 的計算為 $k / 2^N = k_1 k_2 k_3 \dots k_N / 2^N = (k_1 \times 2^{N-1} + k_2 \times 2^{N-2} + k_3 \times 2^{N-3} + \dots + k_N \times 2^0) / 2^N = k_1 \times 2^{-1} + k_2 \times 2^{-2} + k_3 \times 2^{-3} + \dots + k_N \times 2^{-N} = (\sum_{l=1}^N k_l \times 2^{-l})$ 。

總和 $\sum_{k=0}^{2^N-1}$ 的計算將完成 2^N 個項目的總和。

$\sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_N=0}^1$ 的總和的計算也是為了完成 2^N 個項目的總和。

如果它們處理相同的項目，則 $(\sum_{k=0}^{2^N-1}) = (\sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_N=0}^1)$ 。因此，我們如下重寫量子逆傅立葉變換的定義（4.40）

$$\mathbf{QFT}(|a\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \times \left(\sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_N=0}^1 e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times (\sum_{l=1}^N k_l \times 2^{-l}))} |k_1 \dots k_N\rangle\right). \quad (4.41)$$

乘積表示 $(\otimes_{l=1}^N e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_l \times 2^{-l})} |k_l\rangle)$ 等於

$$\begin{aligned} & (e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_1 \times 2^{-1})} |k_1\rangle) \otimes (e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_2 \times 2^{-2})} |k_2\rangle) \otimes \dots \otimes \\ & (e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_N \times 2^{-N})} |k_N\rangle) = (e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_1 \times 2^{-1})} \times \dots \times \\ & e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_N \times 2^{-N})} |k_1 \dots k_N\rangle) = (e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times (k_1 \times 2^{-1} + \dots + k_N \times 2^{-N}))} |k_1 \dots k_N\rangle) = \end{aligned}$$

$(e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times (\sum_{l=1}^N k_l \times 2^{-l}))} |k_1 \dots k_N\rangle)$ 。因此，我們將量子逆傅立葉變換的定義

（4.41）重寫如下

$$\mathbf{QFT}(|a\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \times \left(\sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_N=0}^1 \otimes_{l=1}^N e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_l \times 2^{-l})} |k_l\rangle\right) \quad (4.42)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \times \left(\otimes_{l=1}^N \left(\sum_{k_l=0}^1 e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times k_l \times 2^{-l})} |k_l\rangle\right)\right) \quad (4.43)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \times \left(\otimes_{l=1}^N (e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times 0 \times 2^{-l})} |0\rangle + e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times 1 \times 2^{-l})} |1\rangle)\right) \quad (4.44)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2^N}}\right) \times \left(\otimes_{l=1}^N (|0\rangle + e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times 1 \times 2^{-l})} |1\rangle)\right). \quad (4.45)$$

除法運算($a \times 2^{-l} = a / 2^l$)， $1 \leq l \leq N$ 是完成 1 位置向小數點 “.” 的左移。這表明對於 $1 \leq l \leq N$ ，我們得到一個 $a \times 2^{-l} = a / 2^l = a_1 \dots a_{N-l}. a_{N-l+1} a_{N-l+2} \dots a_N$ 。

因此，我們得到 $e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a \times 1 \times 2^{-l})} = e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times a_1 \dots a_{N-l}. a_{N-l+1} \dots a_N)} = e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (a_1 \dots a_{N-l} + 0. a_{N-l+1} \dots a_N))} = \left(e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (a_1 \dots a_{N-l}))} \times e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0. a_{N-l+1} \dots a_N))} \right) = \left(1 \times e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0. a_{N-l+1} \dots a_N))} \right) = e^{(-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0. a_{N-l+1} \dots a_N))}$ 。

接下來，我們如下重寫量子逆傅立葉變換的定義 (4.45)

$$\begin{aligned} \mathbf{QFT}(|a\rangle) &= \mathbf{QFT}(|a_1 a_2 a_3 \dots a_N\rangle) = \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &\otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_{N-2} a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_1 a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

因此，從上面的陳述中，我們立即得出乘積表示 (4.39) 等效於逆量子傅立葉變換的定義 (4.38)，並且等於逆量子傅立葉變換的定義。

4.9 實現逆量子傅立葉變換的量子電路

乘積表示 (4.39) 使得設計實現逆量子傅里葉逆變換的高效電路變得容易。這樣的電路如圖

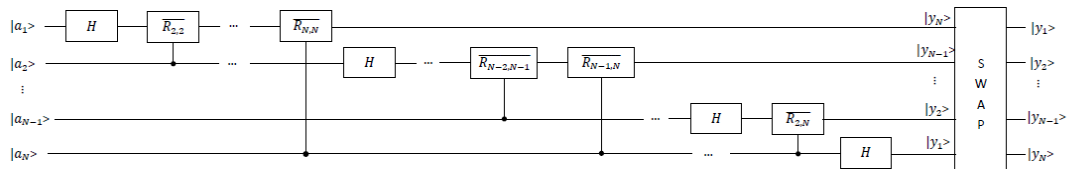


圖 4.6：實現逆量子傅立葉變換的高效電路。

4.6。考慮當狀態 $|a_1 \dots a_N\rangle$ 是圖 4.6 中所示電路的輸入時，會發生什麼，該電路計算逆量子傅立葉變換。將 Hadamard 閘應用於第一個量子位會產生以下狀態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_1} |1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle \quad (4.47)$$

當 $a_1 = 1$ 時，我們獲得 $e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_1} = e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.1} = e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2})} = e^{-\sqrt{-1} \times \pi} = -1$ ，當 $a_1 = 0$ 時，我們獲得 $e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_1} = e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.0} = 1$ 。這滿足了 Hadamard 閘的功能。接下來，使用受控的 $\overline{R_{2,2}}$ 閘生成以下狀態

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_1} \times e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.0a_2} |1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \\ e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0.a_1 + 0.0a_2)} |1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_1 a_2} |1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle. \end{aligned} \quad (4.48)$$

當 $a_2 = 1$ 等於控制位 $|a_2\rangle$ 為 $|1\rangle$ 時，它將相加 $e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{4})} = e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.01} = e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.0a_2}$ 。到第一個 $|1\rangle$ 的係數。當 $|a_2\rangle$ 等於控制位 $|a_2\rangle$ 為 $|0\rangle$ 時，它不會更改第一個 $|1\rangle$ 的係數，因為 $e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.0a_2} = e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.00} = 1$ 。這滿足受控 $\overline{R_{2,2}}$ 的功能閘。

接下來，利用受控的 $\overline{R_{3,3}}$ 閘產生以下狀態

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_1 a_2} \times e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.00a_3} |1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \\ e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0.a_1 a_2 + 0.00a_3)} |1\rangle) |a_2 \cdots a_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_1 a_2 a_3} |1\rangle) \\ |a_2 \cdots a_N\rangle. & \end{aligned} \quad (4.49)$$

當 $a_3 = 1$ 等於控制位 $|a_3\rangle$ 為 $|1\rangle$ 時，它將相加

$e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{8})} = e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.001} = e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.00a_3}$ 到第一個 $|1\rangle$ 的係數。當 $a_3 = 0$ 等於控制位 $|a_3\rangle$ 為 $|0\rangle$ 時，它不會更改第一個 $|1\rangle$ 的係數，因為

$e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.00 a_3} = e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.000} = 1$ 。這滿足受控- $\overline{R_{3,3}}$ 的功能閘。

我們繼續使用- $\overline{R_{4,4}}$ ， $\overline{R_{5,5}}$ 至 $\overline{R_{N,N}}$ 閘，它們分別添加相位($e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.000 a_4}$)，相位($e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.0000 a_5}$)通過階段 ($e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.00 \dots a_N}$)到第一個|1>的係數。在此過程結束時，我們得到以下狀態

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_1 a_2 a_3} \times e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.000 a_4} \times e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.0000 a_5} \times \dots \times \\ & e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.00 \dots a_N} |1\rangle) |a_2 \dots a_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \\ & e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (0. a_1 a_2 a_3 + 0.000 a_4 + 0.0000 a_5 + 0.00 \dots a_N)} |1\rangle) |a_2 \dots a_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \\ & e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_N} |1\rangle) |a_2 \dots a_N\rangle. \end{aligned} \quad (4.50)$$

接下來，我們在第二個量子位上完成類似的過程。使用 Hadamard 閘到第二個量子位會產生以下狀態

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_1 a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_2} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |a_3 \dots a_N\rangle. \quad (4.51)$$

接下來，應用受控

- $\overline{R_{2,3}}$ ， $\overline{R_{3,4}}$ 至 $\overline{R_{N-1,N}}$ 閘產生以下狀態

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_1 a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) |a_3 \dots a_N\rangle. \quad (4.52)$$

我們以這種方式繼續每個量子位，給出最終狀態

$$\left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_1 a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \dots \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.53)$$

接下來，使用交換操作反轉量子位的順序。交換操作後，量子位的狀態為

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_{N-2} a_{N-1} a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \\ & \dots \otimes \left(\frac{|0\rangle + e^{-\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0. a_1 a_2 \dots a_N} |1\rangle}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

與方程式 (4.39) 和方程式 (4.54) 比較，我們查看了逆量子傅立葉變換的期望輸出。這種構造還表明，由於圖 4.6 電路中的每個閘都是單一的，因此逆量子傅立葉變換是單一的。

4.10 實施逆量子傅立葉變換的時間複雜度評估

圖 4.6 中實現逆量子傅立葉變換的電路有多少個閘？我們首先通過做一個 Hadamard 閘和對第一個量子位進行 $(n-1)$ 有條件的旋轉來開始。這總共需要 n 個閘。下一個類似的過程是在第二個量子比特上執行 Hadamard 閘和 $(n-2)$ 有條件的旋轉。這總共需要 $n + (n-1)$ 個閘。接下來的類似過程是在第三量子位上進行 Hadamard 閘和 $(n-3)$ 有條件的旋轉。這總共需要 $n + (n-1) + (n-2)$ 個閘。以這種方式繼續進行，總共需要 $n + (n-1) + (n-2)$ 個閘，以及最多 $n/2$ 個交換閘，這些閘會反轉量子位的順序。

因為應用三個受控 NOT 閘可以實現每個交換閘，所以圖 4.6 中的該電路提供了 $O(n^2)$ 算法來執行逆量子傅立葉變換。找出 2^n 個元素上的離散傅立葉逆變換的最佳經典算法是 $O(n \times 2^n)$ 閘的快速傅立葉變換。這表明，與在量子計算機上實現逆傅立葉逆變換相比，在數字（經典）計算機上處理逆離散傅立葉逆變換需要更多的運算。

4.11 計算給定口功能的周期和頻率

給定的眼功能為： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid$

$a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。值 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4})$ 是給定口眼的每個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的幅度

（權重）功能。輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的振幅的絕對值（權重）的平方有可能獲得以輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 為輸入值的 Of 的輸出。絕對值的平方與每個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的幅度（權重）的總和等於 1。其中的 16 個輸出隨後分別從 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ 輸入

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right).$$

周期 r 滿足任意兩個輸入端 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + r$ 的 $(a_1 a_2 a_3 a_4 + r) = \text{Of}(a_1 a_2$

$a_3 a_4 + r$)。Of 的頻率 f 等於每十六個輸出的周期數。這使 $r \times f = 16$ 。隱藏的模式和存儲在給定的單眼函數 Of 中的信息將使其輸出旋轉回其初始值($\frac{1}{\sqrt{2^4}}$)八次。這意味著每 16 個輸出的周期數為 8，Of 的頻率 f 等於 8。因此，這使得 Of 的周期 r 為 $16/8 = 2$ 。當 Of 將兩個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + 2$ 作為其輸入值時，它將對兩個輸入產生相同的輸出。也就是說， $\text{Of}(a_1 a_2 a_3 a_4) = \text{Of}(a_1 a_2 a_3 a_4 + 2)$ 。為了獲得頻率 f 和 Of 的周期 r ，需要對 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4}$ 進行至少十六次指數計算並乘以 16 倍。

4.11.1 給定口腔功能中信號的周期和頻率

但是，我們可以使用另一種方法（第二種方法）獲得給定的眼功能 Of 的周期 r 和頻率 f 。換句話說，值($\frac{1}{\sqrt{2^4}}$)是每個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的幅度大小（權重）。輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的幅值（權重）的絕對值的平方有可能獲得以輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 為輸入值的 Of 的輸出。值($2 \times \pi \times (1/2) \times a_4$)是這些輸入幅度之間的相位。相位可以取 0 到 360 度之間的任何值。從 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ 的每個輸入的相位依次為 $0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ$ 和 180° 。我們將 Of 的輸入域視為時域，並將其輸出的相位視為信號。計算週期 r 和 Of 的頻率 f 等效於確定時域（輸入域）中信號的周期 r 和頻率 f 。

因為從 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ 的每個輸入的輸出相位依次為 $0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ$ 和 180° ，我們將 16 個輸入值作為相應的 16 個時間單位，將 16 個相位作為 16 個信號樣本。每個樣本編碼一個角度。角度可以為 0 度或 180 度。從 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ 的十六個輸入值對應於從零到十五的十六個時間單位。我們使用圖 4.7 解釋了為什麼計算 Of 的周期 r 和頻率 f 等於確定時域（輸入域）中信號的周期 r 和頻率 f 的原因。在圖 4.7 中，水平軸代表時域，其中包含輸入域，垂直軸代表信號，其中包含來自輸出的 16 個相位。從圖 4.7 可以看出，信號旋轉了八次回到其初始值 0° 也就是說，每十六個時間單位有八個信號周期，信號頻率 f 等於八個。這樣得出信號的周期 r 等於 $(16/8) = (2)$ 。因為到每個輸出的大小相同並且等於($\frac{1}{\sqrt{2^4}}$)並且信號（到的每個輸出的相位）旋轉回到其初始值 0° 八次，所以它的輸出旋轉八次回到其初始值($\frac{1}{\sqrt{2^4}}$)。這表明每十六個輸出的周期數為八，的頻率 f 等於八。因此，得出的周期 r 為 $16/8 = 2$ 。

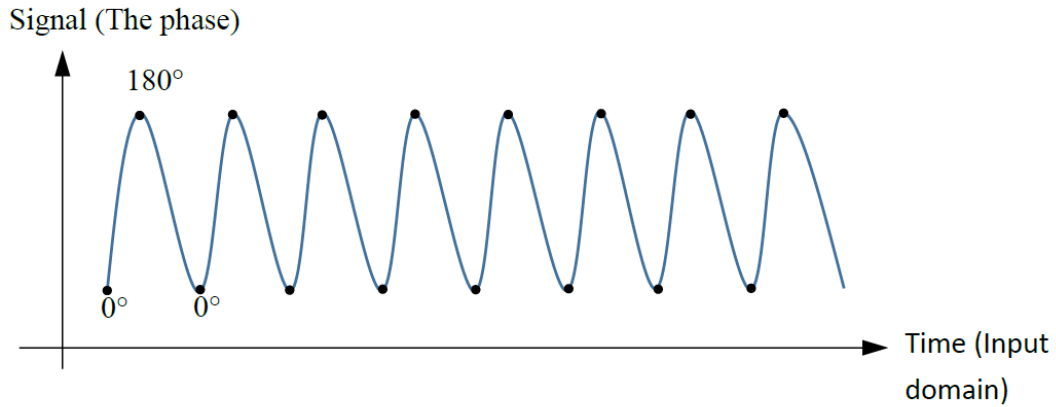


圖 4.7：從給定的口功能的輸出的 16 個相位中採樣 16 個點，其中包括： $\{a_1 a_2 a_3$

$$a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\} \right\}。$$

4.11.2 在給定的眼功能中代表信號的周期和頻率的圓圈符號

因為在 4.11.1 小節的圖 4.7 中，採樣 16 個點僅對 Of 的 16 個輸出進行了 16 個相位的編碼，因此我們使用圓圈符號（另一個概念）來解釋如何找出週期 r 和 Of 的頻率 f 等於確定週期 r 和時域（輸入域）中信號的頻率 f 。在一個圓中，實心半徑表示輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的幅度大小。這意味著圓的大小（陰影區域）與輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的幅度的絕對值的平方成正比。這意味著圓的大小（陰影區域）與以輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 作為輸入值獲得 Of 的輸出的可能性成正比。圓圈中繪製的較深的線表示相位（正角）使圓圈逆時針旋轉或相位（負角）使圓圈順時針旋轉。圓圈下面的數字 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 編碼到 Of 的輸入。在圖 4.8 中，它包含給定口功能的十六個輸出，

其中包括： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\} \right\}$ 。在圖 4.8 中，十六個圓編碼了圖 4.7 中的採樣十六個點，每個圓下面的十六個數字編碼了圖 4.7 時域的十六個時間單位。

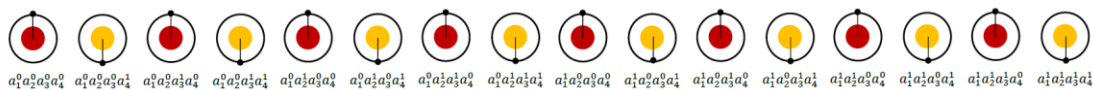


圖 4.8：給定的口功能的十六個輸出，其中包括： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1$

$$\leq d \leq 4\} \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\} \right\}。$$

因為在圖 4.8 中每個圓的陰影區域與 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})^2$ 成正比，所以每個圓的陰影區域是相同的。在圖 4.8 中，左第一個圓的半徑為 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}) = (1/4)$ ，即向 $(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0)$ 。輸出的大小。在左第一個圓中繪製的較暗線表示 $(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0)$ 的輸出相位為 0° ，並向左第一個圓旋轉 0° 。左第一個圓圈下方的數字 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 對 $(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0)$ 。接受的輸入進行編碼。類似地，在圖 4.8 中，左第二個圓的半徑為 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}) = (1/4)$ ，即向 $(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1)$ 。輸出的大小。在左第二個圓中繪製的較深的線表示 $(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1)$ 的輸出相位為 180° ，並向左第二個圓旋轉 180° 。左第二個圓圈下方的數字 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1$ 對 $(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1)$ 。接受的輸入進行編碼。類似地，在圖 4.8 中，左第三個圓到最後一個圓的半徑均為 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}) = (1/4)$ ，即從 $(a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^0)$ 的輸出量的 $(a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1)$ 。在左第三個圓圈到最後一個圓圈之間繪製的較暗的線表示， $(a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^0)$ 到 $(a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1)$ 的輸出相位依次為 $0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ$ 和 180° 。隨後，它們將 0° 旋轉和 180° 旋轉 7 次，直到最後一個圓向左第三個圓旋轉。在最後一個圓左下方的第三個圓圈下方的十四個數字 $a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ 編碼十四個輸入，隨後由 $(a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^0)$ 到 $(a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1)$ 進行輸入。

從圖 4.8 可以看出，在十六個圓（採樣十六個點）的信號中存儲的隱藏模式和信息是信號（相位）旋轉回其初始值 0° 八次。這表明每 16 個輸入（每 16 個時間單位）就有 8 個信號周期，信號的頻率 f 等於 8。這樣得出信號的周期 r 等於 $(16/8) = (2)$ 。由於信號（到每個輸出的相位）會旋轉八次回到其初始值 0° ，因此其輸出會旋轉八次回到其初始值 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 。這意味著每 16 個輸出的周期數為 8，Of 的頻率 f 等於 8。因此，這使得 Of 的周期 r 為 $16/8 = 2$ 。因此，當給定的單眼函數 Of 將兩個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + 2$ 作為其輸入值時，它將給兩個輸入。這表明到任意兩個輸入端 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + 2$ 的 Of $a_1 a_2 a_3 a_4 = \text{Of}(a_1 a_2 a_3 a_4 + 2)$ 。其中，它只需要實現八個乘法 $(2 \times \pi \times (1/2) \times 1)$ (180°)和八個乘法 $(2 \times \pi \times (1/2) \times 0)$ (0°)。第二種方法極大地增強了第一種方法確定 Of 的周期 r 和頻率 f 的性能。

4.11.3 量子程序的第一階段，用於查找給定的眼功能中信號的周期和頻率

在清單 4.1 中，該程序位於後端，它是 **Open QASM** 的模擬器，在 IBM 的量子計算機中具有 32 個量子位。該程序將確定頻率 f 和 Of 的周期 r ，以便對任意兩個輸入 $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ 和 $(a_1 a_2 a_3 a_4 + r)$ 的 $Of(a_1 a_2 a_3 a_4) = Of(a_1 a_2 a_3 a_4 + r)$ 。在清單 4.1 中，我們介紹瞭如何使用逆傅立葉逆變換來找到頻率 f 和 Of 的周期 r 。圖 4.9 是計算 Of 的頻率 f 和周期 r 的量子電路。聲明 “**OPENQASM 2.0** ;” 清單 4.1 的第一行指出該程序是使用 **Open QASM** 的 2.0 版編寫的。接下來，聲明 “包括 “**qelib1.inc**” ;” 清單 4.1 的第二行將繼續解析文件 “**qelib1.inc**”，就好像文件的內容粘貼在 **include** 語句的位置一樣，其中文件 “**qelib1.inc**” 是 **Quantum Experience (QE)** 標準標頭並相對於當前工作目錄指定路徑。

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[4];
4. creg c[4];

```

清單 4.1：確定給定的眼功能的頻率 f 和周期 r 的程序其中： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。

接下來，聲明 “**qreg q[4];**” 清單 4.1 第 3 行上的聲明是在程序中有四個量子位。在圖 4.9 的左上方，四個量子位分別是 $q[0]$ ， $q[1]$ ， $q[2]$ 和 $q[3]$ 。每個量子位的初始值設置為狀態 $|0\rangle$ 。我們使用四個量子比特 $q[0]$ ， $q[1]$ ， $q[2]$ 和 $q[3]$ 來編碼輸入域 $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\}$ 的。也就是說，量子位 $q[0]$ 編碼位 a_1 ，量子位 $q[1]$ 編碼位 a_2 ，量子位 $q[2]$ 編碼位 a_3 ，量子位 $q[3]$ 編碼位 a_4 。

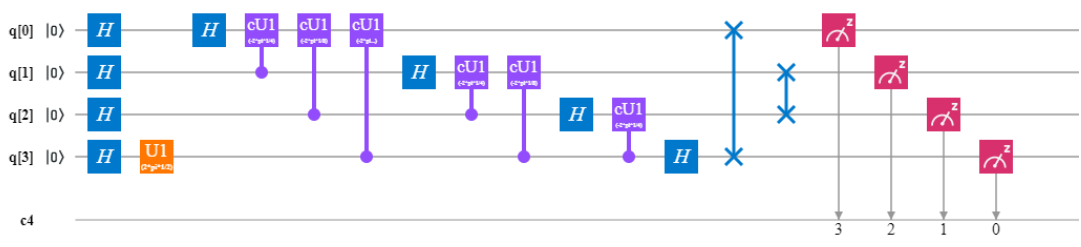


圖 4.9：計算給定的眼功能的頻率 f 和周期 r 的量子電路，其中： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。

為了方便我們的解釋，對於 $0 \leq k \leq 3$ 的 $q[k]^0$ 表示 $q[k]$ 的值 0，對於 $0 \leq k \leq 3$ 的 $q[k]^1$ 表示 $q[k]$ 的值 1。同樣，為便於說明，確定頻率 f 和 O_f 的周期 r 的初始狀態向量，以便對任意兩個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 進行 $O_f(a_1 a_2 a_3 a_4) = O_f(a_1 a_2 a_3 a_4 + r)$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + r$ 為

$$|\Omega_0\rangle = |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle = |0\rangle |0\rangle |0\rangle |0\rangle = |0000\rangle。$$

初始狀態向量 $|\Omega_0\rangle$ 的相應十進制值為 $2^3 \times q[0]^0 + 2^2 \times q[1]^0 + 2^1 \times q[2]^0 + 2^0 \times q[3]^0$ 。這意味著量子位 $q[0]^0$ 是最高有效位，量子位 $q[3]^0$ 是最低有效位。然後，聲明 “creg c [4];” 清單 4.1 的第四行聲明該程序中有四個經典位。在圖 4.9 的左下角，四個經典位依次為 $c[0]$ ， $c[1]$ ， $c[2]$ 和 $c[3]$ 。每個經典位的初始值都設置為零 (0)。

為了方便我們的解釋，對於 $0 \leq k \leq 3$ 的 $c[k]^0$ 表示 $c[k]$ 的值 0，對於 $0 \leq k \leq 3$ 的 $c[k]^1$ 表示 $c[k]$ 的值 1。 $c[k]$ 。四個初始古典位 $c[3]^0 c[2]^0 c[1]^0 c[0]^0$ 的對應十進制值為 $2^3 \times c[3]^0 + 2^2 \times c[2]^0 + 2^1 \times c[1]^0 + 2^0 \times c[0]^0$ 。這表明經典位 $c[3]^0$ 是最高有效位，經典位 $c[0]^0$ 最低有效位。

接下來，四個語句 “h q[0];”，“h q[1];”，“h q[2];” 和 “h q[3];” 清單 4.1 的第 5 至第 8 行中的第一個時隙將實現四個 Hadamard 閘

Listing 4.1 continued...

```
// We use the following five statements to implement a given oracular function  $O_f$ :
//  $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\}\}$ .

5. h q[0];
6. h q[1];
7. h q[2];
8. h q[3];
9. u1(2*pi*1/2) q[3];
```

圖 4.9 中的量子電路圖。四個語句 “h q[0];”，“h q[1];”，“h q[2];” 和 “h q[3];” 將初始狀態向量 $|\Omega_0\rangle = |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle$ 作為它們的輸入狀態向量。因為每個量子位的初始狀態都設置為狀態 $|0\rangle$ ，所以這四個語句 “h q[0];”，“h q[1];”，“h q[2];” 和

“h q[3];”實際實現 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 。也就是說，這四個語句將四個量子位 q[0], q[1], q[2]和 q[3]從一種狀態|0>轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (它們的疊加)。因此，四個量子位 q[0], q[1], q[2]和 q[3]的疊加為 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle))$ 。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + |q[3]^1\rangle)\right).$$

接下來，聲明 ““u1(2*pi*1/2) q[3];”清單 4.1 中第 9 行的代碼實際上實現了圖 4.9 中量子電路第二個時隙的一個旋轉閘 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix}$ 。語句 “ “u1(2*pi*1/2) q[3];”將新的狀態向量(|Ω₁>)作為其輸入狀態向量。因為量子位 q [3]的狀態為 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + |q[3]^1\rangle))$ ，所以語句“u1(2*pi*1/2) q[3];”實際完成

$$\begin{aligned} \text{“u1(2*pi*1/2) q[3];” actually completes } & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times \pi} \\ & |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1) |1\rangle). \end{aligned}$$

這表示語句“u1(2*pi*1/2) q[3];”相乘 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} = e^{\sqrt{-1} \times \pi} = \cos(\pi) + \sqrt{-1} \times \sin(\pi) = -1 + \sqrt{-1} \times 0 = -1$ 表示量子位 q [3]的疊加態|1>的係數，並且不改變量子疊加 q 的態|0>的係數 q [3]位。因為在圖 4.9 中的量子電路的第二個時隙中，沒有量子閘作用於量子位 q [0]至 q [2]，所以它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

$$\begin{aligned}
|\Omega_2\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)\right) \\
&\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 1/2} |q[3]^1\rangle)\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)\right) \\
&\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1) |q[3]^1\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^4}} (|q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 1/2} |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 1/2} |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 1/2} |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 1/2} |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 1/2} |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 1/2} |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 1/2} |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times 1/2} |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^4}} (|q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
&\quad |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle).
\end{aligned}$$

在新的狀態向量($|\Omega_2\rangle$)中，從狀態 $|q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle$ 到狀態 $|q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle$ 隨後是 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}, (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}))$ 。這就是說，在新的狀態向量($|\Omega_2\rangle$)中，它使用每個狀態的幅度對給定的眼功能 O_f 的十六個輸出進行編碼： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1}\times 2\times\pi\times \frac{1}{2}\times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。存儲在新狀態向量($|\Omega_2\rangle$)中的隱藏模式和信息將使振幅旋轉八次回到其初始值 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 。

類似地，在新的狀態向量($|\Omega_2\rangle$)中，它將每個狀態的幅度的大小($\frac{1}{\sqrt{2^4}} = (1/4)$)用作圖中每個圓的半徑 4.8。因為在圖 4.8 中每個圓圈的陰影區域與 $(1/4)^2$ 成正比，所以每個圓圈的陰影區域是相同的。在新的狀態向量($|\Omega_2\rangle$)中，從狀態 $|q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle$ 到狀態 $|q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle$ 隨後為 $0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 0^\circ$ 和 180° 。隨後，它們向左第一個圓到圖 4.8 中的最後一個圓進行 0° 旋轉和 180° 旋轉八次。在新的狀態向量($|\Omega_2\rangle$)中，它使用在圖 4.8 的左第一個圓到最後一個圓之間繪製的暗線來指示 0° 旋轉和 180° 旋轉八次到圖 16 中的十六個圓 4.8。這就是說，存儲在新狀態向量($|\Omega_2\rangle$)中的隱藏模式和信息是指相位旋轉八次回到其初始值 0° 。

4.11.4 量子程序中的逆量子傅立葉變換給定口功能中信號的周期和頻率

接下來，清單 4.1 中從第 10 行到第 21 行的十二個語句實現了具有四個量子位的逆量子傅立葉變換。語句 “ h q [0];”

Listing 4.1 continued...

```
// We use the following twelve statements to implement the inverse quantum
// Fourier transform with four quantum bits.

10. h q[0];
11. cu1(-2*pi*1/4) q[1],q[0];
12. cu1(-2*pi*1/8) q[2],q[0];
13. cu1(-2*pi*1/16) q[3],q[0];

14. h q[1];
15. cu1(-2*pi*1/4) q[2],q[1];
16. cu1(-2*pi*1/8) q[3],q[1];
```

清單 4.1 中第 10 行上的第一個示例在圖 4.9 的第三個時隙中實現了一個 Hadamard 閘。它以新的狀態向量 $|\Omega_2\rangle$ 作為其輸入狀態向量。因為 $|\Omega_2\rangle$ 中量子位 q [0]的當前狀態為 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle))$ ，所以語句 “ h q [0];”清單 4.1 中第 10 行上的代碼

實際上實現了 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ 。這表明語句 “h q [0];”將量子

位 q [0]從一種狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle))$ (其疊加) 轉換為另一種狀態 $|q[0]^0\rangle$ 。因為在圖 4.9 中的量子電路的第三個時隙中，沒有量子閘作用於量子位 q [1]至 q [3]，所以它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_3\rangle = (|q[0]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1)|q[3]^1\rangle)).$$

接下來，聲明 “cu1(-2*pi*1/4) q[1],q[0];”清單 4.1 中第 11 行上的是受控旋轉閘 e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1}\times -2\times\pi\times 1/4} \end{bmatrix}。控制位是量子位 q [1]，目標位是量子位 q [0]。如果$$

控制位是 $|1\rangle$ 並且目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1}\times -2\times\pi\times 1/4}$ 添加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句 “cu1(-2*pi*1/4) q[1],q[0];”清單 4.1 中第 11 行上的 “行” 將新的狀態向量 $|\Omega_3\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.9 的第四個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位 q [0]的狀態為 $(|q[0]^0\rangle)$ ，所以語句 “cu1(-2*pi*1/4) q[1],q[0];”不會更改目標位 q [0]的狀態 $(|q[0]^0\rangle)$ 。在圖 4.9 中的量子電路的第四個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位 q [2]至 q [3]，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_4\rangle = (|q[0]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1)|q[3]^1\rangle)).$$

接下來，聲明 “cu1(-2*pi*1/8) q[2],q[0];” 清單 4.1 中第 12 行上的是一個受控旋

$$\text{轉閘} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1}\times -2\times\pi\times 1/8} \end{bmatrix}。控制位是量子位 q [2]，目標位是量子位 q [0]。$$

如果控制位是 $|1\rangle$ 並且目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1}\times -2\times\pi\times 1/8}$ 加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句 “cu1(-2*pi*1/8) q[2],q[0];”清單 4.1 中第 12 行上的代碼採用新的狀態向量 $|\Omega_4\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.9 的

第五個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位 $q[0]$ 的狀態為 $(|q[0]^0\rangle)$ ，所以語句“ $\text{cu1}(-2*\pi*1/8) q[2],q[0];$ ”不會更改目標位 $q[0]$ 的狀態 $(|q[0]^0\rangle)$ 。在圖 4.9 中的量子電路的第五個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位 $q[1]$ 和 $q[3]$ ，它們的當前狀態不變。這表明我們獲得了以下新的狀態向量

$$|\Omega_5\rangle = (|q[0]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1)|q[3]^1\rangle)\right).$$

接下來，聲明“ $\text{cu1}(-2*\pi*1/16) q[3],q[0];$ ”清單 4.1 中第 13 行上的是受控旋轉閘

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1}\times-2\times\pi\times1/16} \end{bmatrix}.$$

控制位是量子位 $q[3]$ ，目標位是量子位 $q[0]$ 。如

果控制位是 $|1\rangle$ 並且目標位是 $|1\rangle$ ，則它將相位 $e^{\sqrt{-1}\times-2\times\pi\times1/16}$ 添加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“ $\text{cu1}(-2*\pi*1/16) q[3],q[0];$ ” 清單 4.1 中第 13 行上的“行”將新的狀態向量 $|\Omega_5\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.9 的第六個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位 $q[0]$ 的狀態為 $(|q[0]^0\rangle)$ ，所以語句“ $\text{cu1}(-2*\pi*1/16) q[3],q[0];$ ”不會更改目標位 $q[0]$ 的狀態 $(|q[0]^0\rangle)$ 。在圖 4.9 中的量子電路的第六個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位 $q[1]$ 和 $q[2]$ ，它們的當前狀態不變。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_6\rangle = (|q[0]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1)|q[3]^1\rangle)\right).$$

接下來，聲明 “ $h q[1];$ ”清單 4.1 中的第 14 行上的圖 9 在圖 4.9 的第七個時隙中完成了一個 Hadamard 閘。它將新的狀態向量 $q[1]$ in $|\Omega_6\rangle$ 作為其輸入狀態向量。

因為 $|\Omega_6\rangle$ 中量子位 $q[1]$ 的當前狀態為 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle))$ ，所以語句 “ $h q[1];$ ”

清單 4.1 中第 14 行上的代碼實際上實現了 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ 。這

意味著語句 “ $h q[1];$ ”將量子位 $q[1]$ 從一種狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle))$ (其疊加) 轉換為另一種狀態 $|q[1]^0\rangle$ 。因為在圖 4.9 中的量子電路的第七個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位 $q[0]$ ， $q[2]$ 和 $q[3]$ ，所以它們的當前狀態不變。這表明我們獲得了以下新的狀態向量

$$|\Omega_7\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1) |q[3]^1\rangle)\right).$$

接下來，聲明“**cu1(-2*pi*1/4) q[2],q[1];**”清單 4.1 中第 15 行上的是一個受控旋轉

$$\text{閘} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1}\times-2\times\pi\times 1/4} \end{bmatrix}。控制位是量子位 q[2]，目標位是量子位 q[1]。如$$

果控制位是 $|1\rangle$ 並且目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1}\times-2\times\pi\times 1/4}$ 添加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“**cu1(-2*pi*1/4) q[2],q[1];**”清單 4.1 中第 15 行上的“行”將新的狀態向量 $|\Omega_7\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.9 的第八個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位 q [1]的狀態為 $(|q[1]^0\rangle)$ ，所以語句“**cu1(-2*pi*1/4) q[2],q[1];**”不會更改目標位 q [1]的狀態 $(|q[1]^0\rangle)$ 。在圖 4.9 中的量子電路的第八個時隙中，沒有量子閘作用於量子位 q [0]和 q [3]，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_8\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1) |q[3]^1\rangle)\right).$$

接下來，聲明“**cu1(-2*pi*1/8) q[3],q[1];**”清單 4.1 中第 16 行上的是受控旋轉閘

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1}\times-2\times\pi\times 1/8} \end{bmatrix}。控制位是量子位 q[3]，目標位是量子位 q[1]。如果$$

控制位是 $|1\rangle$ 並且目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1}\times-2\times\pi\times 1/8}$ 加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“**cu1(-2*pi*1/8) q[3],q[1];**”清單 4.1 中第 16 行上的“行”將新的狀態向量 $|\Omega_8\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.9 的第九個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位 q [1]的狀態為 $(|q[1]^0\rangle)$ ，所以語句“**cu1(-2*pi*1/8) q[3],q[1];**”不會更改目標位 q [1]的狀態 $(|q[1]^0\rangle)$ 。在圖 4.9 中的量子電路的第九個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位 q [0]和 q [2]，它們的當前狀態不變。這表明我們獲得了以下新的狀態向量

$$|\Omega_9\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1) |q[3]^1\rangle)\right).$$

接下來，聲明 “**h q [2];**” 清單 4.1 中的第 17 行上的代碼在圖 4.9 的第十個時隙中執行一個 Hadamard 閘。它以新的狀態向量 $|\Omega_9\rangle$ 作為輸入狀態

Listing 4.1 continued...

```

17. h q[2];
18. cu1(-2*pi*1/4) q[3],q[2];

19. h q[3];

20. swap q[0],q[3];
21. swap q[1],q[2];

```

向量。因為 $|\Omega_9\rangle$ 中量子位 $q[2]$ 的當前狀態為 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle))$ ，所以語句 “ h

q [2];”清單 4.1 中第 17 行上的代碼實際上實現了 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$|0\rangle$ 。這就是說語句 “ h q [2];”將量子位 $q[2]$ 從一種狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle))$ (其疊加)轉換為另一種狀態 $|q[2]^0\rangle$ 。因為在圖 4.9 中的量子電路的第十個時隙中，沒有量子閘作用於量子位 $q[0]$ ， $q[1]$ 和 $q[3]$ ，所以它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_{10}\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) (|q[2]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1) |q[3]^1\rangle)).$$

接下來，聲明 “ cu1 (-2 * pi * 1/4) q [3] , q [2];” 清單 4.1 中的第 18 行是

受控旋轉閘 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/4} \end{bmatrix}$ 。控制位是量子位 $q[3]$ ，目標位是量子

位 $q[2]$ 。如果控制位是 $|1\rangle$ ，而目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/4}$ 添加到狀

態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句 “cu1(-2*pi*1/4)

q[3],q[2];” 清單 4.1 中第 18 行上的 “行” 將新的狀態向量 $|\Omega_{10}\rangle$ 作為其輸入狀態

向量，並在圖 4.9 的量子電路的第 11 個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為

目標位 $q[2]$ 的狀態為 $(|q[2]^0\rangle)$ ，所以語句 “ cu1(-2*pi*1/4) q[3],q[2];” 不會更改

目標位 $q[2]$ 的狀態 ($|q[2]^0\rangle$)。在圖 4.9 中的量子電路的第 11 個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位 $q[0]$ 和 $q[1]$ ，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_{11}\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) (|q[2]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1) |q[3]^1\rangle)\right)。$$

接下來，聲明 “ $h\ q[3];$ ” 清單 4.1 中的第 19 行上的圖 4.9 在圖 4.9 量子電路的第十二個時隙中實現了一個 Hadamard 閘。它以新的狀態向量 $|\Omega_{11}\rangle$ 作為其輸入狀態向量。因為 $|\Omega_{11}\rangle$ 中量子位 $q[3]$ 的當前狀態為 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1) |q[3]^1\rangle)\right)$ ，所以語句 “ $h\ q[3];$ ” 清單 4.1 中第 19 行上的代碼實際上實現了

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle。$$

這表明語句 “ $h\ q[3];$ ” 將量子位 $q[3]$ 從一種狀態 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (-1) |q[3]^1\rangle)\right)$ 轉換為另一種狀態 $|q[3]^1\rangle$ 。因為在圖 4.9 中的量子電路的第十二個時隙中，沒有量子閘作用於量子位 $q[0]$ ， $q[1]$ 和 $q[2]$ ，所以它們的當前狀態不變。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_{12}\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) (|q[2]^0\rangle) (|q[3]^1\rangle)。$$

接下來，聲明 “ $swap\ q[0],q[3];$ ” 清單 4.1 中第 20 行的是交換閘 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，用於交換包含在其中的信息兩個量子位 $q[0]$ 和 $q[3]$ 。它以新的狀態矢量 $|\Omega_{12}\rangle$ 作為其輸入狀態矢量，並在圖 4.9 的量子電路的第十三時隙中實現一個交換閘。

因為在圖 4.9 中的量子電路的第十三時隙中，沒有量子閘作用於量子位 $q[1]$ 和 $q[2]$ ，所以它們的當前狀態不變。因此，在聲明 “ $swap\ q[0],q[3];$ ” 之後在清單 4.1 中的第 20 行，我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_{13}\rangle = (|q[0]^1\rangle) (|q[1]^0\rangle) (|q[2]^0\rangle) (|q[3]^0\rangle)。$$

接下來，聲明 “swap q[1],q[2];” 清單 4.1 中第 21 行的是交換閘 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

用於交換包含在其中的信息兩個量子位 $q[1]$ 和 $q[2]$ 。它以新的狀態向量 $|\Omega_{13}\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.9 的量子電路的第 14 個時隙中實現一個交換閘。因為在圖 4.9 中的量子電路的第 14 個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位 $q[0]$ 和 $q[3]$ ，所以它們的當前狀態不變。因此，在聲明 “swap q[1],q[2];” 之後在清單 4.1 中的第 21 行，我們獲得以下新的狀態向量

$$|\Omega_{14}\rangle = (|q[0]^1\rangle) (|q[1]^0\rangle) (|q[2]^0\rangle) (|q[3]^0\rangle)$$

4.11.5 在量子程序中進行測量，以讀取 Given Oracular

Function 中信號的周期和頻率

量子位 $q[0]$ 是最高有效位，量子位 $q[3]$ 是最低有效位。經典位 $c[3]$ 是最高有效位，經典位 $c[0]$ 是最高有效位

Listing 4.1 continued...

```
22. measure q[0] -> c[3];
23. measure q[1] -> c[2];
24. measure q[2] -> c[1];
25. measure q[3] -> c[0];
```

最低有效位。因此，有四個語句 “measure q[0] -> c[3];” ， “measure q[1] -> c[2];” ， “measure q[2] -> c[1];” 。和 “measure q[3] -> c[0];” 從清單 4.1 中的

第 22 行到第 25 行，從最高有效量子位 $q[3]$ 到最高有效量子位 $q[0]$ 。他們通過覆蓋最高有效經典位 $c[3]$ 至最低有效經典位 $c[0]$ 記錄測量結果。他們完成了圖 4.9 中從量子電路的第十五個時隙到第十八個時隙的測量。

在後端是 IBM 量子計算機中具有 32 個量子位的 *Open QASM 模擬器*，我們使用命令 “run” 執行清單 4.1 中的程序。測量結果如圖 4.10 所示。從圖 4.10 中，我們得出結果 1000 ($c[3] = q[0] = |1\rangle$, $c[2] = q[1] = |0\rangle$, $c[1] = q[2] = |0\rangle$ and $c[0] = q[3] = |0\rangle$)，概率為 1 (100%)。就是說，在可能性為 1 (100%) 的情況下，我們獲得了量子位 $q[0]$ 的值 $|1\rangle$ ，量子位 $q[1]$ 的值 $|0\rangle$ ，量子位 $q[2]$ 的值為 $|0\rangle$ ，量子位 $q[3]$ 的值為 $|0\rangle$ 。測得的結果 1000 (八) 的概率為 1 (100%) 表示對於 given oracular function O_f : $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\}\}$ ，其輸出旋轉八次回到其初始值 ($\frac{1}{\sqrt{2^4}}$)，並且其輸出的相位旋轉八次回到其初始值 0° 。這意味著每 16 個輸出的周期數為 8， O_f 的頻率 f 等於 8。因此，我們得出 O_f 的周期 r 為 $(16 / 8) = 2$ ，因此對於任何兩個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + 2$ 的 $O_f(a_1 a_2 a_3 a_4) = O_f(a_1 a_2 a_3 a_4 + 2)$

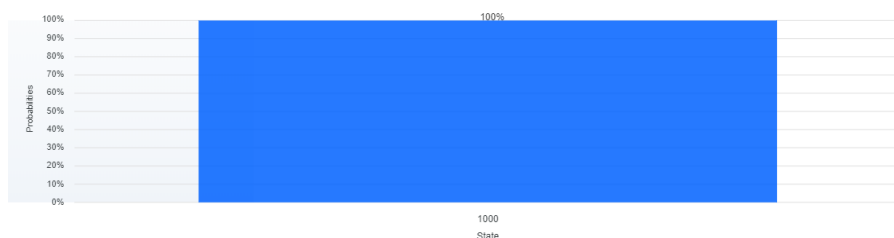


圖 4.10：對於 given oracular function O_f ，信號頻率為每個具有四個量子位的量子寄存器的信號周期數為 1000，概率為 1 (100%)， $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\}\}$.

4.11.6 逆量子傅立葉變換在 Given Oracular Function 中尋找信號的周期和頻率的功效

在清單 4.1 中從第 5 行到第 9 行的 5 條語句之後，對圖 4.7 中的 16 個點進行採樣對 given oracular function O_f 的輸出的 16 個相位進行編碼： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} \times a_4} \mid a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。接下來，在清單 4.1 中從第 10 行到第 21 行的十二個語句之後，具有四個量子位 $q[0]$, $q[1]$, $q[2]$ 和 $q[3]$ 的量子狀態向量對信號的頻率進行編碼，並且信號頻率的強度。接下來，在清單 4.1 中從第 22 行到第 25 行的四條語句之後，圖 4.10 中測得的結果為 1000，可能性為 100%。我們使用圖 4.11 來解釋，量子傅立葉逆變換與離散傅立葉逆變換具有相同的功效，**可以找到相同的 oracular function O_f 的頻率 f 和周期 r**

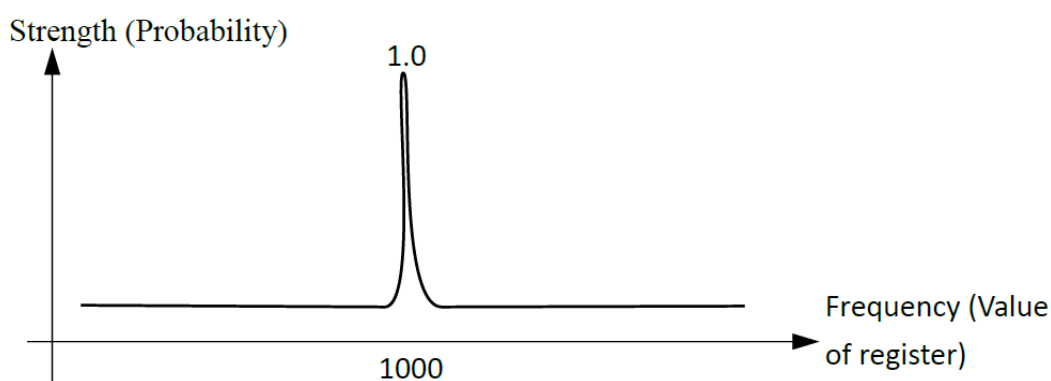


圖 4.11：信號的頻率是具有四個量子位的量子寄存器的測量結果，其強度是在圖 4.7 中採樣 16 個點的逆量子傅立葉變換之後獲得結果的可能性。

將圖 4.10 的水平軸作為圖 4.11 的新水平軸，並將圖 4.10 的垂直軸作為圖 4.11 的新垂直軸。由於圖 4.10 的水平軸表示測量結果，該結果是具有四個量子位的量子寄存器的值，並且是信號的頻率，因此圖 4.11 的新水平軸表示信號的頻率。類似地，由於圖 4.10 的垂直軸表示獲得每個測量結果的可能性，即信號頻率的強度，因此圖 4.11 的新垂直軸表示信號頻率的強度。由於圖 4.10 中測得的結果為 1000（八），可能性為 100%，因此圖 4.11 中的信號頻率為 1000（八），信號強度為 100%。

從圖 4.11 可以看出， O_f 的每個輸出的相位的信號頻率 f 等於 1000（八）。這表明信號旋轉八次回到其初始值 0° ，並且每十六個時間單位有八個信號周期。這使得到 O_f 的每個輸出的相位的信號周期 r 等於 $(16 / 8) = (2)$ 。因為到 O_f 的每個輸出的大小相同並且等於 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 並且信號（到 O_f 的每個輸出的相位）旋轉回到其初始值 0° 八次，所以它的輸出旋轉八次回到其初始值 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 也就是說，每十六個輸出的周期數為 1000（八）， O_f 的頻率 f 等於八。因此，這使得 O_f 的周期 r 為 $16/8$

=2。這意味著，量子逆傅立葉變換和離散傅立葉逆變換具有相同的功效來求出相同的 f 的頻率 f 和周期 r 具有相同的 *oracular function*。

4.12 確定 *Second Given Oracular Function* 的頻率和周期

Second Given Oracular Function 是 $S_f: \{a_1 a_2 a_3 a_4 / \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\}$

$$\rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2} \times a_3 + \frac{1}{4} \times a_4)} \mid a_3 \right.$$

and $a_4 \in \{0, 1\}$ 。對於 second given oracular function S_f ，值 $\left(\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times$

$e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4}\right)$ 是每個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 。輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的振幅的絕對值（權重）

的平方有可能獲得將輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 作為其輸入值的 S_f 的輸出。絕對值的平方與每個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的振幅（權重）的和等於 1。從 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1$

a_4^1 的每個輸入的 S_f 的十六個輸出分別為 $\left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2^4}}\right),$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2^4}}\right),$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2^4}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right)$ and $\left(-\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2^4}}\right)$ 。

S_f 的周期 r 滿足任何兩個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + r$ 的 $S_f(a_1 a_2 a_3 a_4) = S_f(a_1 a_2 a_3 a_4 + r)$ 。每十六個輸出的周期數等於 S_f 的頻率 f 。這樣得出 $r \times f$ 的值等於十六 (16)。存儲在 second given oracular function S_f 中的隱藏信息和隱藏模式是因為其輸出四次旋轉回到其初始值 $\left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right)$ 。也就是說，每十六個輸出的 *周期數為四*

個， S_f 的頻率 f 等於四個。因此，由於 $r \times f$ 的值等於十六 (16)，因此得出 S_f 的周期 r 等於 $(16 / 4) = 4$ 。這意味著當 S_f 接受兩個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + 4$ 作為其輸入值， S_f 的兩個輸出與兩個輸入相同。這表明 $S_f(a_1 a_2 a_3 a_4) = S_f(a_1 a_2 a_3$

$a_4 + 4)$ 。為了獲得頻率 f 和 S_f 的周期 r ，需要完成至少 16 次對 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4}$ 進行指數計算並乘以 16 倍。

4.12.1 在 *second given oracular function* 中對周期和相位頻率進行編碼的信號

對於 second given oracular function S_f ，值 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 是每個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的幅度大小

(權重)。輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的幅值 (權重) 的絕對值的平方可以獲取以輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 為輸入值的 S_f 輸出。值 $(2 \times \pi \times 0.a_3a_4) = (2 \times \pi \times ((1/2) \times a_3 + (1/4) \times a_4))$ 是這 16 個輸入的幅度之間的相位。相位可以取 0 度到 360 度之間的任何值。從 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ 的每個輸入的相位分別為 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ 和 270° 。由於來自 S_f 的十六個輸出的每個振幅的大小都是 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ ，因此我們將 S_f 的輸入域視為時域，並將其十六個輸出

的相位視為信號。這意味著確定頻率 f 和 S_f 的周期 r 等同於找出時域 (輸入域) 中信號的頻率 f 和周期 r 。

由於從 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ 的每個輸入的輸出相位分別為 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ 和 270° ，我們將 16 個輸入值作為相應的 16 個時間單位，將 16 個相位作為 16 個信號樣本。每個樣本編碼一個角度。該角度可以為 0 度或 90 度或 180 度或 270 度。從 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ 的十六個輸入值對應於從零到十五的十六個時間單位。我們使用圖 4.12 來說明為什麼找出頻率 f 和 S_f 的周期 r 等效於計算時域 (輸入域) 中信號的頻率 f 和周期 r 的原因。在圖 4.12 中，水平軸表示時域，其中包括 S_f 的輸入域，垂直軸表示信號，其中包括來自其輸出的十六個相位。從圖 4.12 可以看出，信號四次旋轉回到其初始值 0° 。這意味著每十六個時間單位有四個信號周期，信號頻率 f 等於四個。這樣得出信號的周期 r 等於 $(16/4) = (4)$ 。由於到 S_f 的每個輸出的大小相同並且等於 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ ，並且信號 (到 S_f 的每個輸出的相位)

旋轉回到其初始值 0° 四次，因此其輸出旋轉四次回到其初始值 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 。也就是說，每十六個輸出的周期數為四個， S_f 的頻率 f 等於四個。因此，這使得 S_f 的周期 r 為 $(16/4) = (4)$ 。

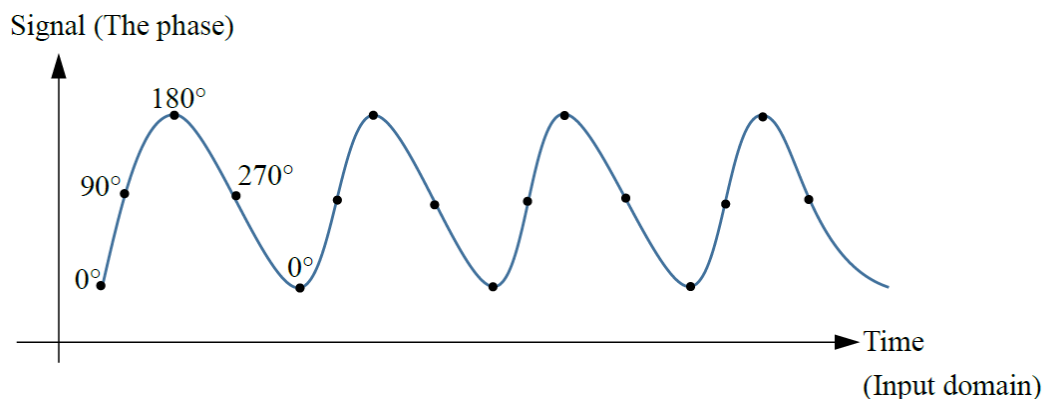


圖 4.12：從 second given oracular function S_f 的 16 個輸出的每個相位採樣 16 個點： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 / \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\} = \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2} \times a_3 + \frac{1}{4} \times a_4)} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\}$.

4.12.2 對 second given oracular function 的輸出的周期和頻率進行編碼的圓圈符號

在 4.12.1 小節的圖 4.12 中，採樣 16 個點僅對 S_f 的 16 個輸出中的 16 個相位進行編碼，因此我們使用圓符號表示如何確定頻率 f 和 S_f 的周期 r 等效於處理頻率 f 和時域（輸入域）中信號的周期 r 。在一個圓中，填充半徑將振幅的幅度編碼為 S_f ，以 S_f 為輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 作為其輸入值。這就是說，圓的大小（陰影區域）與 $S_f(a_1 a_2 a_3 a_4)$ 的振幅的絕對值的平方成正比。這給出了圓的大小（陰影區域）與以輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 作為輸入值的 S_f 輸出的可能性成正比。在圓圈中繪製的較暗的線表示相位（負角度）使圓圈順時針旋轉或相位（正角度）使圓圈逆時針旋轉。圓圈下面的數字 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 對 S_f 的輸入進行編碼。在圖 4.13 中，它包括

second given oracular function S_f 的十六個輸出： $\{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\} = \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2} \times a_3 + \frac{1}{4} \times a_4)} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。在圖 4.13 中，十六個圓圈對圖 4.12 中的十六個採樣點進行編碼，每個圓圈下方的十六個數字對圖 4.12 的時域（輸入域）的十六個時間單位進行編碼。

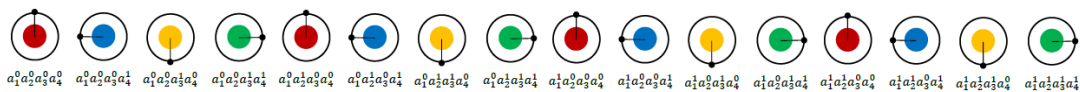


圖 4.13：second given oracular function S_f 的十六個輸出： $\{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times$

$e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\} = \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2} \times a_3 + \frac{1}{4} \times a_4)} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。

由於圖 4.13 中每個圓圈的陰影區域與 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})^2$ 成正比，因此每個圓圈的陰影區域相同。在圖 4.13 中，左第一個圓圈下方的數字 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$ 編碼一個零值，該值是 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0)$ 的輸入。在左第一個圓中繪製的較暗線指出， $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0)$

的輸出相位為 0° ，並向左第一個圓旋轉 0° 。左第一個圓的半徑為 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}) = (1/4)$ ，即輸出到 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0)$ 的大小。類似地，在圖 4.13 中，左第二個圓圈下方的數字 $a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1$ 編碼值 1，該值是 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1)$ 的輸入。在左第二個圓中繪製的較暗線表示 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1)$ 的輸出相位為 90° ，並向左第二個圓旋轉 90° 。

左第二圓的半徑為 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}) = (1/4)$ ，即輸出到 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^1)$ 的大小。類似地，在圖 4.13 中，左第三個圓圈下方的數字 $a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^0$ 對值 2 進行編碼，該值是 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^0)$ 的輸入。左側第三個圓圈中繪製的較深線指出， $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^0)$ 的輸出相位為 180° ，並使左側第三個圓圈旋轉 180° 。左第三個圓的半徑是 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}) = (1/4)$ ，即輸出到 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^0)$ 的大小。類似地，在圖 4.13 中，左第四個圓圈下方的數字 $a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^1$ 對值 3 進行編碼，該值是 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^1)$ 的輸入。在左第四個圓圈中繪製的較深線表示 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^1)$ 的輸出相位為 270° ，並向左第四個圓圈旋轉 270° 。左第四個圓的半徑是 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}) = (1/4)$ ，即輸出到 $S_f(a_1^0 a_2^0 a_3^1 a_4^1)$ 的大小。

類似地，在圖 4.13 中，左第五個圓到最後一個圓的半徑都是 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}) = (1/4)$ ，即通過 $S_f(a_1^0 a_2^1 a_3^0 a_4^0)$ 輸出的幅度的 $(a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1)$ 。從左第五個圓到最後一個圓繪製的較深的線指出， $Of(a_1^0 a_2^1 a_3^0 a_4^0)$ 到 $Of(a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1)$ 的輸出相位分別為 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ 和 270° 。它們分別向左第五個圓到最後一個圓分別進行 0 度旋轉，90 度旋轉，180 度旋轉和 270 度旋轉三遍。在最後一個圓左下方的第五個圓下面的十二個數字 $a_1^0 a_2^1 a_3^0 a_4^0$ 到 $a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1$ 編碼十二個值四到十五，這些值隨後是 $S_f(a_1^0 a_2^1 a_3^0 a_4^0)$ 到 $Of(a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1)$ 的十二個輸入。

從圖 4.13 可以看出，在十六個圓（採樣十六個點）的信號中存儲的隱藏模式和信息是信號（相位）旋轉四次回到其初始值 0° 。也就是說，每十六個輸入（每十六個時間單位）就有四個信號周期，信號的頻率 f 等於四個。這意味著信號的周期 r 等於 $(16/4) = (4)$ 。由於信號（每個輸出到 S_f 的相位）旋轉四次回到其初始值 0° ，因此其輸出旋轉四次回到其初始值 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 。這表明每十六個輸出的周期數為四個， S_f 的頻率 f 等於四個。因此，這使 S_f 的周期 r 為 $16/4 = 4$ 。因此，當 second given oracular function S_f 將兩個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + 4$ 作為其輸入值時，它給出的輸出相同到兩個輸入。這就是說 $S_f(a_1 a_2 a_3 a_4) = S_f(a_1 a_2 a_3 a_4 + 4)$ 到任意兩個輸入 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + 4$ 。這樣，就可以獲得頻率 f 和周期 S_f 的 r ，它只需要實現四個乘法 $(2 \times \pi \times 0.00) (0^\circ)$ ，四個乘法 $(2 \times \pi \times 0.01)$

(90°)，四個乘法(2 × π × 0.10) (180°)，以及四個乘法(2 × π × 0.11) (270°)。它極大地提高了第一種計算頻率 f 和 S_f 的周期 r 的性能。

4.12.3 實現 Second Given Oracular Function 的十六個輸出的量子程序和量子電路

在清單 4.2 中，該程序位於後端，它是 *Open QASM 的模擬器*，在 IBM 量子計算機中具有 32 個量子位。該程序將計算頻率 f 和 S_f 的周期 r，以使 S_f(a₁ a₂ a₃ a₄) = S_f(a₁ a₂ a₃ a₄ + r) 到任意兩個輸入 a₁ a₂ a₃ a₄ 和 a₁ a₂ a₃ a₄ + r。在清單 4.2 中，我們說明瞭如何應用具有一個量子位的量子閘和逆量子傅立葉變換來確定 S_f 的頻率 f 和周期 r。圖 4.14 是找到頻率 f 和 S_f 的周期 r 的量子電路。聲明

“ OPENQASM 2.0; ” 清單 4.2 的第一行上的代碼指示該程序是使用 Open QASM 的 2.0 版編寫的。接下來，聲明 “包括“qelib1.inc”清單 4.2 的第二行將繼續解析文件 “qelib1.inc”，就像文件的內容粘貼在 include 語句的位置一樣，其中文件 “qelib1.inc” 是 *Quantum Experience (QE) Standard Header* 並相對於當前工作目錄指定路徑。

```

1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[4];
4. creg c[4];

```

清單 4.2：計算 *second given oracular function* S_f 的秒數的頻率 f 和周期 r 的程

序： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 / \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in$

$\{0, 1\}\} = \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2} \times a_3 + \frac{1}{4} \times a_4)} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。

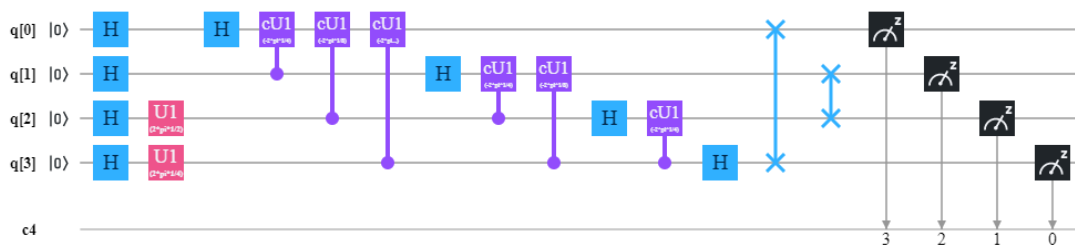


圖 4.14：求出 *second given oracular function* S_f 的頻率 f 和周期 r 的量子電路： $\{a_1$

$$a_2 a_3 a_4 | \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4 \rangle \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\} \right\} =$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2} \times a_3 + \frac{1}{4} \times a_4)} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\} \right\} .$$

接下來，聲明 “qreg q[4];” 清單 4.2 的第三行聲明了程序中有四個量子位。在圖 4.14 的左上方，四個量子位依次為 q[0], q[1], q[2] 和 q[3]。每個量子位的初始值設置為狀態 |0>。我們利用四個量子位元 q[0], q[1], q[2] 和 q[3] 來對輸入域 {a₁ a₂ a₃ a₄ / ∀ a_d ∈ {0, 1} for 1 ≤ d ≤ 4}。這表明量子位 q[0] 編碼位 a₁，量子位 q[1] 編碼位 a₂，量子位 q[2] 編碼位 a₃，量子位 q[3] 編碼位 a₄。

為了便於解釋，對於 0 ≤ k ≤ 3 的 q[k]⁰ 將對 q[k] 的值 0 進行編碼，對於 0 ≤ k ≤ 3 的 q[k]¹ 將對 q[k] 的值 1 進行編碼。類似地，為了便於說明，我們計算出初始頻率向量 ff 和周期 S_f，以使 S_f(a₁ a₂ a₃ a₄) = S_f(a₁ a₂ a₃ a₄ + r) 進入任意兩個輸入 a₁ a₂ a₃ a₄ 和 a₁ a₂ a₃ a₄ + r 是

$$|B_0\rangle = |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle = |0\rangle |0\rangle |0\rangle |0\rangle = |0000\rangle .$$

初始狀態向量 |B₀> 的相應十進制值為 2³ × q[0]⁰ + 2² × q[1]⁰ + 2¹ × q[2]⁰ + 2⁰ × q[3]⁰。也就是說，量子位 q[0]⁰ 是最高有效位，量子位 q[3]⁰ 是最低有效位。

接下來，聲明 “creg c[4];” 清單 4.2 第四行的代碼聲明程序中有四個經典位。在圖 4.14 的左下方，四個經典位分別為 c[0], c[1], c[2] 和 c[3]。每個經典位的初始值都設置為零(0)。為了便於說明，對於 0 ≤ k ≤ 3 的 c[k]⁰ 將對 c[k] 的值 0 進行編碼，對於 0 ≤ k ≤ 3 的 c[k]¹ 將對 c[k] 的值 1 進行編碼。四個初始古典位 c[3]⁰ c[2]⁰ c[1]⁰ c[0]⁰ 的對應十進制值為 2³ × c[3]⁰ + 2² × c[2]⁰ + 2¹ × c[1]⁰ + 2⁰ × c[0]⁰。這意味著經典位 c[3]⁰ 是最高有效位，經典位 c[0]⁰ 是最低有效位。

接下來，四個語句 “h q[0];”, “h q[1];”, “h q[2];” 和 “h q[3]”，清單 4.2 的第 5 至 8 行中的第一個時隙完成了四個 Hadamard 閘

Listing 4.2 continued...

```
// We use the following six statements to implement the second given oracular
// function Sf: {a1 a2 a3 a4 | ∀ ad ∈ {0, 1} for 1 ≤ d ≤ 4} → { $\frac{1}{\sqrt{2^4}}$  × e√-1 × 2 × π × 0.a3 a4 |
// a3 and a4 ∈ {0, 1}} = { $\frac{1}{\sqrt{2^4}}$  × e√-1 × 2 × π × ( $\frac{1}{2}$  × a3 +  $\frac{1}{4}$  × a4) | a3 and a4 ∈ {0, 1}}.
```

5. h q[0];
6. h q[1];
7. h q[2];
8. h q[3];
9. u1(2*pi*1/4) q[3];
10. u1(2*pi*1/2) q[2];

圖 4.14 中的量子電路。四個語句“h q[0];”, “h q[1];” “h q[2];” 和 “h q[3];”將初始狀態向量 $|B_0\rangle = |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle$ 作為其輸入狀態向量。由於 *每個量子位的初始狀態都設置為狀態 $|0\rangle$* ，因此這四個語句“h q[0];”, “h q[1];” “h q[2];” 和

“h q[3];”，實際完成 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(|0\rangle + |1\rangle)$ 。這表明這四個語句將四個量子位 q[0], q[1], q[2] 和 q[3] 從一種狀態 $|0\rangle$ 轉換為另一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (它們的疊加)。*因此*，四個量子位 q[0], q[1],

q[2] 和 q[3] 的疊加為 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle))$ 。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

$$|B_1\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle)) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + |q[3]^1\rangle))。$$

接下來，兩個語句“u1(2*pi*1/4) q[3];” 和 “u1(2*pi*1/2) q[2];” 清單 4.2 中第 9 行

到第 10 行上的代碼隨後完成了一個旋轉閘 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/4} \end{pmatrix}$ 到量子位 q[3] 和另

一個旋轉閘 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix}$ 到圖 4.14 中量子電路第二個時隙中的量子位元

q[2]。這兩個語句是“u1(2*pi*1/4) q[3];” 和 “u1(2*pi*1/2) q[2];” 將新的狀態向量

$|B_1\rangle$ 作為其輸入狀態向量。量子位元 q[3] 的狀態為 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + |q[3]^1\rangle))$ ，量子

位元 q[2] 的狀態為 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + |q[2]^1\rangle))$ 。因此，語句“u1(2*pi*1/4) q[3];” 實際實

$$\begin{aligned} & \text{現} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/4} \end{pmatrix} = \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/4} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \\ & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/4} |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times \pi/2} |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (\sqrt{-1}) |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$(|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle)$ 。這就是說語句 “ $u1(2*\pi*1/4) q[3];$ ” 將相位 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/4} = e^{\sqrt{-1} \times \pi/2} = \cos(\pi/2) + \sqrt{-1} \times \sin(\pi/2) = 0 + \sqrt{-1} \times 1 = \sqrt{-1}$ 對量子位元 $q[3]$ 的疊加的狀態 $|1\rangle$ 不變，而不會改變狀態的係數 $|0\rangle$ 在量子位 $q[3]$ 的疊加上。

$$\begin{aligned} & \text{同樣，語句 “} u1(2*\pi*1/2) q[2]; \text{” 實際實現} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times \pi} \\ & |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1) |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle)。這意味著語句 \end{aligned}$$

“ $u1(2*\pi*1/2) q[2];$ ” 將相位 $e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} = e^{\sqrt{-1} \times \pi} = \cos(\pi) + \sqrt{-1} \times \sin(\pi) = -1 + \sqrt{-1} \times 0 = -1$ 對量子位元 $q[2]$ 的疊加態 $|1\rangle$ 的係數，並且不改變量子疊加的狀態 $|0\rangle$ 的係數 $q[2]$ 位。沒有量子閘在圖 4.14 的量子電路的第二個時隙中作用於量子位 $q[0]$ 至 $q[1]$ ，因此它們的當前狀態不變。這表明我們得到以下新的狀態向量

$$\begin{aligned} |B_2\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/2} \right. \\ & \left. |q[2]^1\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 1/4} |q[3]^1\rangle) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle) \right) \\ & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^4}} (|q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1) |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-\sqrt{-1}) |q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle + \\
& |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
& (-1) |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-\sqrt{-1}) |q[0]^0\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle + \\
& |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
& (-1) |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-\sqrt{-1}) |q[0]^1\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle + \\
& |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^1\rangle + \\
& (-1) |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-\sqrt{-1}) |q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle.
\end{aligned}$$

在新的狀態向量($|B_2\rangle$)中，從狀態 $|q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle$ 到狀態 $|q[0]^1\rangle$

$|q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle$ 隨後是 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}, (\sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{2^4}}),$

$(-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\frac{1}{\sqrt{2^4}}), (\sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{2^4}}), (-\frac{1}{\sqrt{2^4}}),$

和 $(-\sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 。這意味著在新的狀態向量($|B_2\rangle$)中，它將利用每個狀態的幅度

來編碼十六個輸出到 second given oracular function $S_f : \{a_1 a_2 a_3 a_4 \mid \forall a_d \in \{0, 1\}$

for $1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\} = \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times$

$e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2} \times a_3 + \frac{1}{4} \times a_4)} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。存儲在新狀態向量($|B_2\rangle$)中的隱藏信息

和隱藏模式將使振幅四次旋轉回到其初始值 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 。

類似地，在新狀態向量($|B_2\rangle$)中，它使用每種狀態的幅度的大小 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}}) = (1/4)$ 作為

圖 4.13 中每個圓的半徑。在圖 4.13 中，每個圓的陰影區域與 $(1/4)^2$ 成正比，因此每個圓的陰影區域相同。在新的狀態向量($|B_2\rangle$)中，從狀態 $|q[0]^0\rangle |q[1]^0\rangle$

$|q[2]^0\rangle |q[3]^0\rangle$ 到狀態 $|q[0]^1\rangle |q[1]^1\rangle |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle$ 隨後為 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ,$

$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ,$ 和 270° 。隨後，它們向左第一個圓到圖 4.13 中的最後一個圓四次旋轉 0° 度，旋轉 90° 度，旋轉 180° 度和旋轉

270° 度。在新的狀態向量($|B_2\rangle$)中，它應用從圖 4.13 的左第一個圓到最後一個圓繪製的暗線，以指出 0° 旋轉， 90° 旋轉， 180° 旋轉和 270° 旋轉。旋轉四次到圖

4.13 中的十六個圓圈。這表明存儲在新狀態向量($|B_2\rangle$)中的隱藏信息和隱藏模式表明該相位旋轉了四次回到其初始值 0° 。

4.12.4 使用逆傅立葉逆變換來計算 Second Given Oracular

Function 的頻率和輸出週期

接下來，清單 4.2 中從第 11 行到第 22 行的十二個語句實現了具有四個量子位的逆量子傅立葉變換。語句 “h q[0];”

Listing 4.2 continued...

```
// We use the following twelve statements to implement the inverse quantum
// Fourier transform with four quantum bits.

11. h q[0];
12. cu1(-2*pi*1/4) q[1],q[0];
13. cu1(-2*pi*1/8) q[2],q[0];
14. cu1(-2*pi*1/16) q[3],q[0];

15. h q[1];
16. cu1(-2*pi*1/4) q[2],q[1];
17. cu1(-2*pi*1/8) q[3],q[1];
```

清單 4.2 中第 11 行的代碼在圖 4.14 的第三個時隙中完成了一個 Hadamard 閘。它將新的狀態向量 $|B_2\rangle$ 作為其輸入狀態向量。 $|B_2\rangle$ 中的量子位元 q[0] 的當前狀態為 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle)$ ，因此語句 “h q[0];” 清單 4.2 中第 11 行的實際執行

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle = |q[0]^0\rangle$ 。這就是說語句 “h q[0];” 將量子位

q[0] 從一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle + |q[0]^1\rangle)$ (其疊加) 轉換為另一種狀態 $|q[0]^0\rangle$ 。由於在圖 4.14 的量子電路的第三個時隙中沒有量子閘作用於量子位 q[1] 至 q[3]，因此它們的當前狀態不變。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

$$|B_3\rangle = (|q[0]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle)\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle)\right)$$

接下來，聲明 “cu1(-2*pi*1/4) q[1],q[0];” 清單 4.2 中第 12 行上的是一個受控旋

$$\text{轉閘} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/4} \end{bmatrix} \text{。控制位是量子位 } q[1] \text{，目標位是量子位 } q[0] \text{。}$$

如果控制位是 $|1\rangle$ ，而目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/4}$ 加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“`cu1(-2*pi*1/4) q[1],q[0];`”清單 4.2 中第 12 行上的代碼採用新的狀態向量 $|B_3\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.14 的第四個時隙中完成了一個受控的旋轉閘。目標位 $q[0]$ 的狀態為 $(|q[0]^0\rangle)$ ，因此語句“`cu1(-2*pi*1/4) q[1],q[0];`”不會更改目標位 $q[0]$ 的狀態 $(|q[0]^0\rangle)$ 。因為在圖 4.14 的量子電路的第四個時隙中沒有量子閘作用於量子位 $q[2]$ 至 $q[3]$ ，所以它們的當前狀態不變。這意味著我們得到以下新的狀態向量

$$|B_4\rangle = (|q[0]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle)\right) \text{。}$$

接下來，聲明“`cu1(-2*pi*1/8) q[2],q[0];`”清單 4.2 中的第 13 行是

$$\text{受控旋轉閘} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/8} \end{bmatrix} \text{。控制位是量子位 } q[2] \text{，目標位是量子位}$$

$q[0]$ 。如果控制位是 $|1\rangle$ 而目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/8}$ 加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“`cu1(-2*pi*1/8) q[2],q[0];`”清單 4.2 中第 13 行上的“行”將新的狀態向量 $|B_4\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.14 的第五個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位 $q[0]$ 的狀態為 $(|q[0]^0\rangle)$ ，所以語句“`cu1(-2*pi*1/8) q[2],q[0];`”不會更改目標位 $q[0]$ 的狀態 $(|q[0]^0\rangle)$ 。在圖 4.14 的量子電路的第五個時隙中，沒有量子閘作用於量子位 $q[1]$ 和 $q[3]$ ，它們的當前狀態不變。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

$$|B_5\rangle = (|q[0]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle)\right) \text{。}$$

接下來，聲明“`cu1(-2*pi*1/16) q[3],q[0];`”清單 4.2 中第 14 行上的是受控旋轉

$$\text{閘} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/16} & \end{bmatrix} \circ \text{控制位是量子位 } q[3], \text{ 目標位是量子位 } q[0] \circ$$

如果控制位是 $|1\rangle$ ，而目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/16}$ 加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“**cu1(-2*pi*1/16) q[3],q[0];**”清單 4.2 中第 14 行上的“行”將新狀態向量 $|B_5\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.14 的第六個時隙中完成了一個受控的旋轉閘。由於目標位 $q[0]$ 的狀態為 $(|q[0]^0\rangle)$ ，因此語句“**cu1(-2*pi*1/16) q[3],q[0];**”不會更改目標位 $q[0]$ 狀態 $(|q[0]^0\rangle)$ 。在圖 4.14 的量子電路的第六個時隙中，沒有量子閘作用於量子位 $q[1]$ 和 $q[2]$ ，它們的當前狀態不變。這表明我們獲得了以下新的狀態向量

$$|B_6\rangle = (|q[0]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle)\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle)\right) \circ$$

接下來，聲明“**h q[1];**”清單 4.2 中第 15 行上的代碼在圖 4.14 的第七個時隙中實現了一個 Hadamard 閘。它將新的狀態向量 $|B_6\rangle$ 作為其輸入狀態向量。 $|B_6\rangle$ 中量子位 $q[1]$ 的當前狀態為 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right)$ ，因此語句“**h q[1];**”清單 4.2

$$\text{中第 15 行上的實際執行} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle = |q[1]^0\rangle \circ \text{這意味著}$$

語句“**h q[1];**”將量子位 $q[1]$ 從一種狀態 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[1]^0\rangle + |q[1]^1\rangle)\right)$ （其疊加）轉換為另一種狀態 $|q[1]^0\rangle$ 。因為在圖 4.14 的量子電路的第七個時隙中沒有量子閘作用於量子位 $q[0]$, $q[2]$ 和 $q[3]$ ，所以它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

$$|B_7\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle)\right) \circ$$

接下來，聲明“**cu1(-2*pi*1/4) q[2],q[1];**”清單 4.2 中第 16 行的是一個受控旋轉

$$\text{閘} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/4} & \end{bmatrix} \circ \text{控制位是量子位 } q[2]$$

，目標位是量子位 $q[1]$ 。如果控制位是 $|1\rangle$ ，而目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位

$e^{\sqrt{-1}\times-2\times\pi\times1/4}$ 加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句

“**cu1(-2*pi*1/4) q[2],q[1];**” 清單 4.2 中第 16 行上的“行”將新的狀態向量 $|B_7\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.14 的第八個時隙中完成了一個受控的旋轉閘。因為目標位 $q[1]$ 的狀態為 $(|q[1]^0\rangle)$ ，所以語句 “**cu1(-2*pi*1/4) q[2],q[1];**” 不會更改目標位 $q[1]$ 的狀態 $(|q[1]^0\rangle)$ 。在圖 4.14 的量子電路的第八個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位 $q[0]$ 和 $q[3]$ ，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

$$|B_8\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle)\right)。$$

接下來，聲明 “**cu1(-2*pi*1/8) q[3],q[1];**” 清單 4.2 中第 17 行上的是一個受控的

旋轉閘 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1}\times-2\times\pi\times1/8} \end{bmatrix}$ 。控制位是量子位 $q[3]$ ，目標位是量子位

$q[1]$ 。如果控制位是 $|1\rangle$ 而目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1}\times-2\times\pi\times1/8}$ 加到狀態的 $|1\rangle$

的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句 “**cu1(-2*pi*1/8) q[3],q[1];**” 清單 4.2 中第 17 行上的“行”將新的狀態向量 $|B_8\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.14 的第九個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。目標位 $q[1]$ 的狀態為 $(|q[1]^0\rangle)$ ，因此語句 “**cu1(-2*pi*1/8) q[3],q[1];**” 不會更改目標位 $q[1]$ 的狀態 $(|q[1]^0\rangle)$ 。在圖 4.14 的量子電路的第九個時隙中，沒有量子閘作用於量子位 $q[0]$ 和 $q[2]$ ，它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

$$|B_9\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle)\right)。$$

接下來，聲明 “**h q[2];**” 清單 4.2 中第 18 行上的代碼在圖 4.14 的第十個時隙中完成了一個 Hadamard 閘。它以新的狀態向量 $|B_9\rangle$ 作為輸入狀態

Listing 4.2 continued...

- 18. h q[2];
- 19. cu1(-2*pi*1/4) q[3],q[2];

20. h q[3];

21. swap q[0],q[3];

22. swap q[1],q[2];

向量。由於 $|B_9\rangle$ 中量子位 $q[2]$ 的當前狀態為 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle))$ ，因此語

句 “h q[2];” 清單 4.2 中第 18 行上的實際實現 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$

$= |q[2]^1\rangle$ 。這意味著語句 “h q[2];” 將量子位 $q[2]$ 從一種狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^0\rangle + (-1) |q[2]^1\rangle))$ (其疊加) 轉換為另一種狀態 $|q[2]^1\rangle$ 。因為在圖 4.14 的量子電路的第十個時隙中沒有量子閘作用於量子位 $q[0]$, $q[1]$ 和 $q[3]$ ，所以它們的當前狀態不變。這意味著我們得到以下新的狀態向量

$$|B_{10}\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) (|q[2]^1\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[3]^1\rangle))$$

$$= (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (\sqrt{-1}) |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle))。$$

接下來，聲明 “cu1(-2*pi*1/4) q[3],q[2];” 清單 4.2 中第 19 行的是一個受控旋轉

閘 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/4} \end{bmatrix}$ 。控制位是量子位 $q[3]$ ，目標位是量子位 $q[2]$ 。如

果控制位是 $|1\rangle$ ，而目標位是 $|1\rangle$ ，則將相位 $e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/4}$ 加到狀態的 $|1\rangle$ 的係數

中目標位。否則，它不會更改目標位。語句 “cu1(-2*pi*1/4) q[3],q[2];” 清單 4.2 中第 19 行上的行將新的狀態向量 $|B_{10}\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.14 的量子電路的第 11 個時隙中完成了一個受控的旋轉閘。由於目標位 $q[2]$ 的狀態為

$(|q[2]^1\rangle)$ ，因此語句 “cu1(-2*pi*1/4) q[3],q[2];” 將相位 $e^{\sqrt{-1} \times -2 \times \pi \times 1/4} = \cos(-\pi /$

$2) + (\sqrt{-1}) \times \sin(-\pi / 2) = \cos(\pi / 2) + (-1) \times (\sqrt{-1}) \times \sin(\pi / 2) = 0 + (-1) \times (\sqrt{-1}) \times$

$1 = (-\sqrt{-1})$ 至狀態係數是目標位 $q[2]$ 的狀態 $(|q[2]^1\rangle)$ 。在圖 4.14 的量子電路的第

11 個時隙中，沒有量子閘作用於量子位 $q[0]$ 和 $q[1]$ ，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

$$\begin{aligned}
|B_{11}\rangle &= (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle)\right) \\
&= (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[2]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[2]^1\rangle |q[3]^1\rangle)\right) \\
&= (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) (|q[2]^1\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + |q[3]^1\rangle)\right) .
\end{aligned}$$

接下來，聲明 “**h q[3];**” 清單 4.2 中第 20 行的行在圖 4.14 的量子電路的第十二個時隙中執行一個 Hadamard 閘。它將新的狀態向量 $|B_{11}\rangle$ 作為其輸入狀態向量。 $|B_{11}\rangle$ 中的量子位元 $q[3]$ 的當前狀態為 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + |q[3]^1\rangle)$ ，因此語句

$$\text{“h q[3];” 清單 4.2 中第 20 行上的代碼實際上完成了 } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle = |q[3]^0\rangle$ 。這意味著語句 “**h q[3];**” 將量子位 $q[3]$ 從一種狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + |q[3]^1\rangle)$ 轉換為另一種狀態 $|q[3]^0\rangle$ 。由於在圖 4.14 的量子電路的第十二個時隙中沒有量子閘作用於量子位 $q[0]$, $q[1]$ 和 $q[2]$ ，因此它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

$$|B_{12}\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) (|q[2]^1\rangle) (|q[3]^0\rangle) .$$

接下來，聲明 “**swap q[0],q[3];**” 清單 4.2 中第 21 行的是交換閘 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

用於交換包含在其中的信息兩個量子位 $q[0]$ 和 $q[3]$ 。它以新的狀態向量 $|B_{12}\rangle$ 作為輸入狀態向量，並在圖 4.14 的量子電路的第十三時隙中實現一個交換閘。因為在圖 4.14 的量子電路的第十三時隙中沒有量子閘作用於量子位 $q[1]$ 和 $q[2]$ ，所以它們的當前狀態不變。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

$$|B_{13}\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^0\rangle) (|q[2]^1\rangle) (|q[3]^0\rangle) .$$

接下來，聲明 “**swap q[1],q[2];**” 清單 4.2 中第 22 行的是交換閘 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

用於交換包含在其中的信息兩個量子位 $q[1]$ 和 $q[2]$ 。它以新的狀態向量 $|B_{13}\rangle$ 作為其輸入狀態向量，並在圖 4.14 的量子電路的第十四個時隙中執行一個交換閘。由於在圖 4.14 的量子電路的第十四個時隙中沒有量子閘作用於量子位 $q[0]$

和 $q[3]$ ，因此它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

$$|B_{14}\rangle = (|q[0]^0\rangle) (|q[1]^1\rangle) (|q[2]^0\rangle) (|q[3]^0\rangle)。$$

4.12.5 通過在量子程序中使用測量來讀出 *Second Given*

Oracular Function 的頻率和周期

量子位 $q[0]$ 是最高有效位，量子位 $q[3]$ 是最低有效位。經典位 $c[3]$ 是最高有效位，經典位 $c[0]$ 是最高有效位

Listing 4.2 continued...

```
23. measure q[0] -> c[3];
24. measure q[1] -> c[2];
25. measure q[2] -> c[1];
26. measure q[3] -> c[0];
```

最低有效位。因此，這四個語句為 “*measure q[0] -> c[3];*”, “*measure q[1] -> c[2];*”, “*measure q[2] -> c[1];*” 和 “*measure q[3] -> c[0];*” 從清單 4.2 中的第 23 行到第 26 行，從最高有效量子位 $q[3]$ 讀出最高有效量子位 $q[0]$ 。他們通過覆蓋最高有效經典位 $c[3]$ 至最低有效經典位 $c[0]$ 來記錄測量結果。它們實現了圖 4.14 中從量子電路的第十五個時隙到第十八個時隙的測量。

在後端是 IBM 量子計算機中具有 32 個量子位的 *Open QASM 模擬器*，我們使用 “run” 命令執行清單 4.2 中的程序。測量結果如圖 4.15 所示。從圖 4.15 中，我們獲得結果 0100 ($c[3] = q[0] = |0\rangle$ ， $c[2] = q[1] = |1\rangle$ ， $c[1] = q[2] = |0\rangle$ 和 $c[0] = q[3] = |0\rangle$)，概率為 1 (100%)。這表明在可能性為 1 (100%) 的情況下，我們得到了量子位 $q[0]$ 的值 $|0\rangle$ ，量子位 $q[1]$ 的值 $|1\rangle$ ，量子位 $q[2]$ 的值為 $|0\rangle$ ，量子位 $q[3]$ 的值為 $|0\rangle$ 。從測得的結果 0100 (四個)，概率為 1 (100%)，second given oracular function S_f 的輸出旋轉四次回到其初始值($\frac{1}{\sqrt{2^4}}$)，並且其輸出的相位旋轉返回其初始值 0° 的四倍。這意味著每 16 個輸出的周期數為 4， S_f 的頻率 f 等於 4。因此，我們得出 S_f 的周期 r 為 $(16 / 4) = 4$ ，因此對於任何兩個輸入端 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 和 $a_1 a_2 a_3 a_4 + 4$ 的 $S_f(a_1 a_2 a_3 a_4) = S_f(a_1 a_2 a_3 a_4 + 4)$ 。

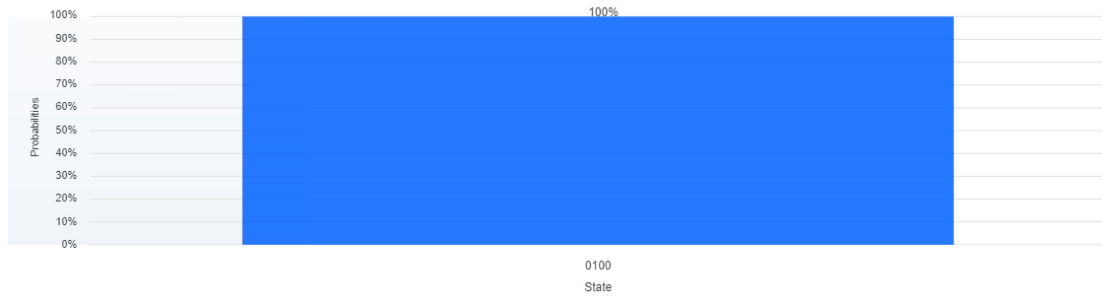


圖 4.15：信號頻率是每個具有四個量子位的量子寄存器的信號周期數，它是 0100，對於 second given oracular function S_f ，概率為 1（100%）： $a_1 a_2 a_3 a_4 / \forall$

$$a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4 \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2} \times a_3 + \frac{1}{4} \times a_4)} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\} \right\}。$$

4.12.6 逆傅立葉逆變換讀取 second given oracular function 的頻率和周期的能力

在清單 4.2 中從第 5 行到第 10 行的 6 條語句之後，對圖 4.12 中的 16 個點進行採樣對 second given oracular function S_f 的輸出的 16 個相位進行編碼： $\{a_1 a_2 a_3$

$$a_4 / \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4 \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3 a_4} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^4}} \right.$$

$\times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times (\frac{1}{2} \times a_3 + \frac{1}{4} \times a_4)} \mid a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\} \}$ 。然後，在清單 4.2 中從第 11 行到第

22 行的十二個語句之後，具有四個量子位 $q[0]$, $q[1]$, $q[2]$ 和 $q[3]$ 的量子狀態向量對信號的頻率進行編碼信號頻率的強度。接下來，在清單 4.2 中從第 23 行到第 26 行的四條語句之後，圖 4.15 中測得的結果為 0100，可能性為 100%。我們利用圖 4.16 來解釋，量子傅立葉逆變換與離散傅立葉逆變換具有相同的功效，可以找到相同的 oracular function S_f 的頻率 f 和周期 r 。我們將圖 4.15 的水平軸作為圖 4.16 的新水平軸，並將圖 4.15 的垂直軸作為圖 4.16 的新垂直軸。圖 4.15 的水平軸表示測量的結果，即量子寄存器的值。



圖 4.16：在圖 4.12 中採樣了 16 個點的量子傅立葉逆變換之後，信號的頻率是具有四個量子位的量子寄存器的測量結果，其強度是讀出結果的可能性。

四個量子位元，並且是信號的頻率，因此圖 4.16 中新的水平軸表示信號的頻率。類似地，由於圖 4.15 的垂直軸表示獲得每個測量結果的可能性，即信號頻率的強度，因此圖 4.16 的新垂直軸表示信號頻率的強度。由於圖 4.15 中測得的結果為 0100 (四個)，可能性為 100%，因此圖 4.16 中的信號頻率為 0100 (四個)，信號強度為 100%。

從圖 4.16 可以看出，信號相對於 S_f 每個輸出的相位的頻率 f 等於 0100 (四個)。這意味著信號四次旋轉回到其初始值 0° ，並且每十六個時間單位有四個信號周期。這意味著信號到 S_f 每個輸出的相位的周期 r 等於 $(16 / 4) = (4)$ 。 S_f 的每個輸出的大小相同，並且等於 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ ，並且信號 (S_f 的每個輸出的相位) 旋轉四次回到其初始值 0° ，因此其輸出旋轉四次回到其初始值 $(\frac{1}{\sqrt{2^4}})$ 。這表明每十六個輸出的周期數為 0100 (四個)，並且 S_f 的頻率 f 等於四個。因此，這使得 S_f 的周期 r 等於 $(16 / 4) = 4$ 。這意味著量子逆傅立葉變換和離散傅立葉逆變換具有相同的幕來找到頻率 f 和周期 f 。相同的 oracular function S_f 。

4.13 小結

在本章中，我們介紹了統一的複雜根源。接下來，我們描述了一個 n 個複數個 n 的單位根的 Abelian 群以及一個乘法的二進制運算。我們還介紹了第 n 個複數根的性質。然後，我們說明了離散傅立葉變換和逆離散傅立葉變換。我們還介紹了實現離散傅立葉變換的量子傅立葉變換。同時，我們描述了實現量子傅立葉變換的量子電路，並給出了實現量子傅立葉變換的時間複雜度的評估。接下來，我們說明了實現逆離散傅立葉變換的量子逆傅立葉變換。同時，介紹了實

現逆量子傅立葉變換的量子電路，並對實現逆量子傅立葉變換的時間複雜度進行了評估。然後，我們編寫了兩個量子程序來計算兩個給定的 oracular functions 輸出的頻率和周期。

4.14 參考書目

在本章中，要獲得有關 n 個複雜的第 n 個單位根及其性質的更多詳細信息，推薦的書是[Cormen et al 2009]。有關離散傅里葉變換和離散傅里葉逆變換的更詳細說明，推薦書籍為[Cormen et al 2009; Nielsen and Chuang 2000; Imre and Balazs 2005; Lipton and Regan 2014; Silva 2018; Johnston et al 2019]。這兩篇著名的文章[Coppersmith 1994; Shor 1994]給出了量子傅立葉變換和逆量子傅立葉變換的原始版本。量子傅立葉變換和逆量子傅立葉變換的乘積狀態分解的一個很好的例子是[Griffiths and Niu 1996; Cleve et al 1998]。[Cross 2017]中的著名文章很好地介紹了 Open QASM 的說明。

4.15 練習

4.1 請編寫一個量子程序來確定 third given oracular function T_f 的輸出頻率和周期： $\{a_1 a_2 a_3 a_4 / \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 4\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^4}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_2 a_3 a_4} \mid a_2, a_3 \text{ and } a_4 \in \{0, 1\}\}$ 。

4.2 請編寫一個量子程序來計算 fourth given oracular function F_f 的輸出頻率和周期： $\{a_1 a_2 a_3 / \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 3\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^3}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_3} \mid a_3 \in \{0, 1\}\}$ 。

4.3 請編寫一個量子程序來計算 fifth given oracular function I_f 的輸出頻率和周期，如果： $\{a_1 a_2 a_3 \mid \forall a_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 3\} \rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2^3}} \times e^{\sqrt{-1} \times 2 \times \pi \times 0.a_2 a_3} \mid a_2 \text{ and } a_3 \in \{0, 1\}\}$ 。